חשבון אינפיניטסימלי א׳ (210.1115) — תרגיל בית 5 לתלמידי תיכון
סמסטר א׳, תש״פ, 2019–2020
פתרונות

מתרגל: ד״ר עמי ויסלטר

החוג למתמטיקה, אוניברסיטת חיפה

1. הוכיחו שהגבולות הבאים קיימים וחשבו את ערכם:

(א) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{7n-3}$

<u>פתרון</u>: לכל $1 \le n \in \mathbb{N}$,

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{7n-3} = \frac{\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^7}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^3}.$$

הואיל ו- $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$ ו- $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1$, נובע מחשבון גבולות ש- $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{7n-3}$ קיים, ושווה ל- $\frac{e^7}{1^3} = e^7$.

(ב) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+3}{n+2}\right)^{1-2n}$

<u>פתרון</u>: לכל $1 \le n \in \mathbb{N}$,

$$\left(\frac{n+3}{n+2}\right)^{1-2n} = \left(\frac{n+2+1}{n+2}\right)^{1-2n} = \left(1+\frac{1}{n+2}\right)^{1-2n} = \left(1+\frac{1}{n+2}\right)^{5-2(n+2)}$$

$$= \frac{\left(1+\frac{1}{n+2}\right)^5}{\left(\left(1+\frac{1}{n+2}\right)^{n+2}\right)^2}.$$

הואיל ו- $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$, גם $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+2}\right)^{n+2} = e$, ומכיוון ש- $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+2}\right) = 1$, נובע מחשבון גבולות ש- $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+3}{n+2}\right)^{1-2n}$ קיים, ושווה ל- $\frac{1^5}{e^2} = e^{-2}$.

2. נגדיר סדרה $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ ברקורסיה על ידי: $a_0 := \frac{3}{2}$, ולכל $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} := \sqrt{1+\frac{a_n^2}{3}}$. הוכיחו כי $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ מתכנסת וחשבו את גבולה.

<u>פתרון</u>: $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ יורדת: נוכיח באינדוקציה שלכל $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} \le a_n$. עבור $n=0$:

$$a_1 = \sqrt{1+\frac{a_0^2}{3}} = \sqrt{1+\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^2}{3}} = \sqrt{1+\frac{\frac{9}{4}}{3}} = \sqrt{1+\frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{7}{4}} = \frac{\sqrt{7}}{2} < \frac{\sqrt{9}}{2} = \frac{3}{2} = a_0.$$

נניח שהטענה נכונה עבור $n \in \mathbb{N}$ מסוים, ונוכיח שהיא נכונה לגבי $n+1$: ואכן, מכך ש- $0 \le a_{n+1} \le a_n$ נקבל ש- $1+\frac{a_{n+1}^2}{3} \le 1+\frac{a_n^2}{3}$, ולכן

$$a_{n+2} = \sqrt{1+\frac{a_{n+1}^2}{3}} \le \sqrt{1+\frac{a_n^2}{3}} = a_{n+1}.$$

הוכחנו את הטענה. בנוסף, כפי שכבר ציינו, $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ מורכבת ממספרים חיוביים בלבד, ולכן היא חסומה (מלרע).
לסיכום, $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ יורדת וחסומה, ולכן, לפי משפט, מתכנסת. נסמן את גבולה ב- L. כיוון ש- $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ מתכנסת ל- L, גם $(a_{n+1})_{n=0}^{\infty}$ מתכנסת ל- L, וכן $\left(\sqrt{1+\frac{a_n^2}{3}}\right)_{n=0}^{\infty}$ מתכנסת ל- $\sqrt{1+\frac{L^2}{3}}$ לפי משפטי חשבון גבולות.
מיחידות הגבול והשוויון בין שתי הסדרות האחרונות, נקבל ש- $L=\sqrt{1+\frac{L^2}{3}}$. משום כך, $L^2=1+\frac{L^2}{3}$, ולכן $L^2=\frac{3}{2}$. מכאן ש- $L\in\left\{\sqrt{\frac{3}{2}},-\sqrt{\frac{3}{2}}\right\}$. אולם, כיוון שכל אברי $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ חיוביים, גם L חיובי (לפי משפט), ולכן $L=\sqrt{\frac{3}{2}}$.

3. (א) נגדיר סדרה $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ ברקורסיה על ידי: $a_0:=\sqrt{2}$, ולכל $n\in\mathbb{N}$, $a_{n+1}:=\sqrt{2a_n}$. הוכיחו כי $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ מתכנסת וחשבו את גבולה.

<u>פתרון:</u> $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ עולה: נוכיח באינדוקציה שלכל $n\in\mathbb{N}$, $a_{n+1}\geq a_n$. עבור $n=0$: $\sqrt{2}>1$, ולכן

$$a_1=\sqrt{2\sqrt{2}}>\sqrt{2\cdot 1}=\sqrt{2}=a_0.$$

נניח שהטענה נכונה עבור $n\in\mathbb{N}$ מסוים, ונוכיח שהיא נכונה לגבי $n+1$: ואכן, מכך ש- $0\leq a_n\leq a_{n+1}$ נקבל ש- $0\leq 2a_n\leq 2a_{n+1}$, ולכן

$$a_{n+2}=\sqrt{2a_{n+1}}\leq\sqrt{2a_n}=a_{n+1}.$$

הוכחנו את הטענה.
נוכיח באינדוקציה שלכל $n\in\mathbb{N}$, $a_n\leq 2$. עבור $n=0$ הטענה נכונה, כי $a_0=\sqrt{2}<2$. נניח שהטענה נכונה עבור $n\in\mathbb{N}$ מסוים, ונוכיח שהיא נכונה לגבי $n+1$: ואכן, $a_{n+1}=\sqrt{2a_n}\leq\sqrt{2\cdot 2}=2$. הוכחנו את הטענה.
לסיכום: $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ עולה וחסומה (מלעיל), ולכן, לפי משפט, מתכנסת. נסמן את גבולה ב- L. כיוון ש- $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ מתכנסת ל- L, גם $(a_{n+1})_{n=0}^{\infty}$ מתכנסת ל- L, וכן $\left(\sqrt{2a_n}\right)_{n=0}^{\infty}$ מתכנסת ל- $\sqrt{2L}$ לפי משפטי חשבון גבולות.
מיחידות הגבול והשוויון בין שתי הסדרות האחרונות, נקבל ש- $L=\sqrt{2L}$. משום כך, $L^2=2L$, ולכן $L\in\{0,2\}$. אולם, כיוון ש- $a_n\geq a_0=\sqrt{2}$, מתקיים $L\geq\sqrt{2}$ (לפי משפט), ולכן $L=2$.

(ב) נתבונן בקבוצה $A:=\left\{\sqrt{2},\sqrt{2\sqrt{2}},\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}},\ldots\right\}$. הוכיחו כי A חסומה, וחשבו את $\inf A$ ואת $\sup A$.

<u>פתרון:</u> A היא קבוצת אברי הסדרה $(a_n)_{n=0}^{\infty}$. הואיל והסדרה חסומה, גם A חסומה (שתי הטענות שקולות). הסדרה עולה, ולכן $\inf A=\inf_{n\in\mathbb{N}}a_n=a_0=\sqrt{2}$. כמו-כן, לפי המשפט על סדרות עולות וחסומות, הגבול של $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ הוא ה- sup שלה, ולפיכך, $\sup A=\sup_{n\in\mathbb{N}}a_n=\lim_{n\to\infty}a_n=2$.

4. תהי $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ סדרה. נניח שלכל $n\in\mathbb{N}$, $a_{2n}\leq a_{2n+2}$ ו- $a_{2n+1}\geq a_{2n+3}$. הוכיחו ש- $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ מתכנסת $\iff$ $\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)=0$.

<u>פתרון:</u> ($\Longleftarrow$) אם $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ מתכנסת, נאמר ל- L, אז גם $(a_{n+1})_{n=0}^{\infty}$ מתכנסת ל- L, ולכן נסיק משפט חשבון גבולות ש- $(a_{n+1}-a_n)_{n=0}^{\infty}$ מתכנסת ל- $L-L=0$.

($\Longrightarrow$) לפי ההנחות, הסדרה $(a_{2n})_{n=0}^{\infty}$ עולה והסדרה $(a_{2n+1})_{n=0}^{\infty}$ יורדת. לכן, לפי משפט, הן מתכנסות ל- sup ול- inf שלהן (במובן הרחב), בהתאמה. נסמן אותם ב- L וב- M. נשים לב ש- $L\in\mathbb{R}$ או $L=\infty$, וש- $M\in\mathbb{R}$ או $M=-\infty$. הואיל והסדרה $(a_{n+1}-a_n)_{n=0}^{\infty}$ מתכנסת לאפס, גם תת-הסדרה שלה $(a_{2n+1}-a_{2n})_{n=0}^{\infty}$ מתכנסת לאפס. אם $L=\infty$ או $M=-\infty$, נקבל ש- $(a_{2n+1}-a_{2n})_{n=0}^{\infty}$ מתכנסת ל- $-\infty$, סתירה. לכן, $L,M\in\mathbb{R}$.
לפי חשבון גבולות, הסדרה $(a_{2n+1}-a_{2n})_{n=0}^{\infty}$ מתכנסת ל- $M-L$. מיחידות הגבול, $M-L=0$, כלומר:

$M = L$.

<u>טענה כללית:</u> תהי $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ סדרה. נניח ש- $(a_{n_k})_{k=0}^{\infty}$ ו- $\left(a_{n'_k}\right)_{k=0}^{\infty}$ הן תתי סדרות שלה כך שאיחוד קבוצות האינדקסים שלהן הוא קבוצת המספרים הטבעיים כולה: $\mathbb{N} = \{n_k : k \in \mathbb{N}\} \cup \{n'_k : k \in \mathbb{N}\}$. נניח ש- $(a_{n_k})_{k=0}^{\infty}$ ו- $\left(a_{n'_k}\right)_{k=0}^{\infty}$ מתכנסות לאותו גבול (במובן הרחב), L. אז גם $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ מתכנסת ל- L.

<u>הוכחת הטענה הכללית:</u> נוכיח את הטענה כאשר $L \in \mathbb{R}$. יהי $\varepsilon > 0$ נתון. $(a_{n_k})_{k=0}^{\infty}$ ו- $\left(a_{n'_k}\right)_{k=0}^{\infty}$ מתכנסות ל- L, ולכן קיימים $k_0, k'_0 \in \mathbb{N}$ כך שלכל $k > k_0$, $|a_{n_k} - L| < \varepsilon$, ולכל $k > k'_0$, $\left|a_{n'_k} - L\right| < \varepsilon$. נסמן $n_0 := \max\left\{n_{k_0}, n_{k'_0}\right\}$. אז $n_0 \in \mathbb{N}$. אם $n > n_0$, אז לפי ההנחה ש- $\mathbb{N} = \{n_k : k \in \mathbb{N}\} \cup \{n'_k : k \in \mathbb{N}\}$, קיים $k \in \mathbb{N}$ כך ש- $n = n_k$ או $n = n'_k$. אם, למשל, $n = n_k$, אז כיוון שסדרת האינדקסים $(n_k)_{k=0}^{\infty}$ עולה ממש, ומכיוון ש- $n_k = n > n_0 \geq n_{k_0}$, נקבל ש- $k > k_0$, ולכן $|a_n - L| = |a_{n_k} - L| < \varepsilon$. הוכחנו את הטענה.

<u>הערה:</u> אפשר לקבל את הטענה הנ"ל כמסקנה מהטענה שנוכיח בשאלה 5 סעיף ב.

<u>סוף פתרון שאלה 4:</u> $(a_{2n})_{n=0}^{\infty}$ ו- $(a_{2n+1})_{n=0}^{\infty}$ מתכנסות לאותו מספר ממשי, L. היות ש- $\mathbb{N} = \{2n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{2n+1 : n \in \mathbb{N}\}$, נובע מהטענה ש- $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ מתכנסת (ל- L).

5. מצאו את כל הגבולות החלקיים של כל אחת מהסדרות הבאות:

(א) $\left(\frac{n^2-n+1}{3n^2+8}\right)_{n=0}^{\infty}$.

<u>פתרון:</u> הסדרה מתכנסת ל- $\frac{1}{3}$ (הוכיחו!), ולכן, לפי משפט, הגבול החלקי היחיד שלה הוא $\frac{1}{3}$.

(ב) הסדרה $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ המוגדרת על ידי $a_n := \begin{cases} \frac{1}{(n+1)^2} & \text{זוגי } n \\ 2 - \frac{1}{n} & \text{אי-זוגי } n \end{cases}$.

<u>טענה כללית:</u> תהי $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ סדרה. נניח ש- $(a_{n_k})_{k=0}^{\infty}$ ו- $\left(a_{n'_k}\right)_{k=0}^{\infty}$ הן תתי סדרות שלה כך שאיחוד קבוצות האינדקסים שלהן הוא קבוצת המספרים הטבעיים כולה: $\mathbb{N} = \{n_k : k \in \mathbb{N}\} \cup \{n'_k : k \in \mathbb{N}\}$. נניח ש- $(a_{n_k})_{k=0}^{\infty}$ מתכנסת ל- L וש- $\left(a_{n'_k}\right)_{k=0}^{\infty}$ מתכנסת ל- M (במובן הרחב). אז קבוצת הגבולות החלקיים של $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ היא $\{L, M\}$. כלומר: L, M הם הגבולות החלקיים של $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ (ורק הם).

<u>הוכחת הטענה הכללית:</u> מצד אחד, נתון ש- L, M גבולות חלקיים של $(a_n)_{n=0}^{\infty}$. מצד שני, תהי $(a_{m_k})_{k=0}^{\infty}$ תת-סדרה מתכנסת של $(a_n)_{n=0}^{\infty}$. נוכיח שהגבול שלה הוא L או M. החיתוך של $\{m_k : k \in \mathbb{N}\}$ עם לפחות אחת מהקבוצות $\{n_k : k \in \mathbb{N}\}$, $\{n'_k : k \in \mathbb{N}\}$ אינסופי, שכן איחודן הוא $\mathbb{N}$ ו- $\{m_k : k \in \mathbb{N}\}$ אינסופית. אם, למשל, חיתוכה עם $\{n_k : k \in \mathbb{N}\}$ אינסופי, פירוש הדבר שלתתי-הסדרות $(a_{n_k})_{k=0}^{\infty}$ ו- $(a_{m_k})_{k=0}^{\infty}$ יש תת-סדרה משותפת. כיוון ש- $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = L$, אותה תת-סדרה מתכנסת אף היא ל- L (משפט); וכיוון ש- $(a_{m_k})_{k=0}^{\infty}$ מתכנסת, כל תת-סדרה שלה מתכנסת לאותו גבול (אותו משפט). לסיכום, $(a_{m_k})_{k=0}^{\infty}$ מתכנסת ל- L.

<u>פתרון סעיף ב:</u> $a_{2n} = \frac{1}{(2n+1)^2}$ ו- $a_{2n+1} = 2 - \frac{1}{2n+1}$ לכל $n \in \mathbb{N}$. לכן, $\lim_{n\to\infty} a_{2n} = 0$ ו- $\lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = 2$. הואיל ו- $\mathbb{N} = \{\text{הטבעיים הזוגיים}\} \cup \{\text{הטבעיים האי-זוגיים}\}$, קבוצת הגבולות החלקיים של הסדרה היא $\{0, 2\}$ לפי הטענה הכללית.

(ג) הסדרה $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ המוגדרת על ידי $a_n := \begin{cases} \frac{1}{(n+1)^2} & n = k^2 \text{ כך ש- } k \in \mathbb{N} \text{ קיים} \\ 2 - \frac{1}{n} & \text{אחרת} \end{cases}$.

<u>פתרון:</u> נגדיר שתי סדרות אינדקסים, $(n_k)_{k=0}^{\infty}$ ו- $(n'_k)_{k=0}^{\infty}$, ע"י: $n_k := k^2$ ו- $(n'_k)_{k=0}^{\infty} := (2, 3, 5, 6, 7, 8, 10, 11, \ldots)$ (המספרים הטבעיים לפי הסדר חוץ מהריבועים השלמים). לפי הנתון, לכל $k \in \mathbb{N}$, $a_{n_k} = \frac{1}{(n_k+1)^2}$ ו- $a_{n'_k} = 2 - \frac{1}{n'_k}$. לפיכך, $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = 0$ ו- $\lim_{k\to\infty} a_{n'_k} = 2$ (כי $\lim_{k\to\infty} n_k = \lim_{k\to\infty} n'_k = \infty$). הואיל ו- $\mathbb{N} = \{n_k : k \in \mathbb{N}\} \cup \{n'_k : k \in \mathbb{N}\}$, קבוצת הגבולות החלקיים של הסדרה היא $\{0, 2\}$ לפי הטענה הכללית.

6. יהיו $(a_n)_{n=0}^\infty$ סדרה ו- L מספר. נניח שקיימים $\varepsilon_0>0$ ותת-סדרה $(a_{n_k})_{k=0}^\infty$ כך ש- $|a_{n_k}-L|\geq\varepsilon_0$ לכל $k\in\mathbb{N}$. הוכיחו כי $(a_n)_{n=0}^\infty$ לא מתכנסת ל- L.

פתרון: אילו $(a_n)_{n=0}^\infty$ הייתה מתכנסת ל- L, הרי שלפי הגדרת הגבול, היה קיים $N\in\mathbb{N}$ כך שלכל $n>N$, $|a_n-L|<\varepsilon_0$. אבל לכל $N\in\mathbb{N}$ קיים $k\in\mathbb{N}$ כך ש- $n_k>N$ (כי סדרת האינדקסים $(n_k)_{k=0}^\infty$ שואפת ל- ∞), ולכן $|a_{n_k}-L|<\varepsilon_0$ - לא נכון ש- $|a_{n_k}-L|\geq\varepsilon_0$ לפי הנתון, כלומר, לא נכון ש- $|a_{n_k}-L|<\varepsilon_0$, סתירה. לכן, $(a_n)_{n=0}^\infty$ לא מתכנסת ל- L.

7. יהיו $(a_n)_{n=0}^\infty$ סדרה ו- L מספר. הוכיחו ש- L גבול חלקי של $(a_n)_{n=0}^\infty$ $\iff$ לכל $\varepsilon>0$ קיימים אינסוף מספרים $n\in\mathbb{N}$ (מקומות בסדרה) כך ש- $|a_n-L|<\varepsilon$.

פתרון: ($\Longleftarrow$) נניח ש- L גבול חלקי של $(a_n)_{n=0}^\infty$. תהי $(a_{n_k})_{k=0}^\infty$ תת-סדרה של $(a_n)_{n=0}^\infty$ שמתכנסת ל- L. יהי $\varepsilon>0$. קיים k_0 כך שלכל $k>k_0$, $|a_{n_k}-L|<\varepsilon$. הקבוצה $\{n_k:k>k_0\}$ אינסופית כי סדרת האינדקסים $(n_k)_{k=0}^\infty$ עולה ממש, ולכל n בקבוצה זו מתקיים $|a_n-L|<\varepsilon$.

($\Longrightarrow$) נניח שלכל $\varepsilon>0$ קיימים אינסוף מספרים $n\in\mathbb{N}$ (מקומות בסדרה) כך ש- $|a_n-L|<\varepsilon$. נגדיר תת-סדרה $(a_{n_k})_{k=0}^\infty$ רקורסיבית. יהי $n_0:=0$. עבור $1\leq k\in\mathbb{N}$, נניח שהגדרנו את $n_0<n_1<\ldots<n_{k-1}$, ונגדיר את n_k כדלקמן: נשתמש בנתון עם $\varepsilon:=\frac{1}{k}$. קיימים אינסוף n-ים כך ש- $|a_n-L|<\frac{1}{k}$. בפרט, נמצא $n_{k-1}<n_k$ כך ש- $|a_{n_k}-L|<\frac{1}{k}$. לסיכום, קיבלנו סדרת אינדקסים (= סדרה עולה ממש של מספרים טבעיים), $(n_k)_{k=0}^\infty$, כך שלכל $1\leq k\in\mathbb{N}$ מתקיים $(\leq 0)\quad |a_{n_k}-L|<\frac{1}{k}$. כיוון ש- $\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}=0$, נסיק ממשפט הכריך שהסדרה $(|a_{n_k}-L|)_{k=0}^\infty$ מתכנסת לאפס, שקול: שהסדרה $(a_{n_k}-L)_{k=0}^\infty$ מתכנסת לאפס, שקול: שהסדרה $(a_{n_k})_{k=0}^\infty$ מתכנסת ל- L. אי לכך, L גבול חלקי של $(a_n)_{n=0}^\infty$, כדרוש.

8. הוכיחו שסדרה <u>אינה</u> חסומה מלעיל $\iff$ יש לה תת-סדרה שמתכנסת ל- ∞.

פתרון: תהי $(a_n)_{n=0}^\infty$ סדרה.

($\Longrightarrow$) אם $(a_{n_k})_{k=0}^\infty$ תת-סדרה של $(a_n)_{n=0}^\infty$ שמתכנסת ל- ∞, אז $(a_{n_k})_{k=0}^\infty$ לא חסומה מלעיל, ולכן וודאי גם $(a_n)_{n=0}^\infty$ אינה חסומה מלעיל.

($\Longleftarrow$) נניח ש- $(a_n)_{n=0}^\infty$ אינה חסומה מלעיל. נגדיר תת-סדרה $(a_{n_k})_{k=0}^\infty$ רקורסיבית. יהי $n_0:=0$. עבור $1\leq k\in\mathbb{N}$, נניח שהגדרנו את $n_0<n_1<\ldots<n_{k-1}$, ונגדיר את n_k כדלקמן: הואיל ו- $(a_n)_{n=0}^\infty$ אינה חסומה מלעיל, ישנו $n\in\mathbb{N}$ כך ש- $a_n>\max\{a_0,a_1,\ldots,a_{n_{k-1}},k\}$. נבחר n כזה ונסמן אותו ב- n_k. אז $n_k\notin\{0,1,\ldots,n_{k-1}\}$, כלומר: $n_k>n_{k-1}$, ו- $a_{n_k}\geq k$. לסיכום: קיבלנו סדרת אינדקסים (= סדרה עולה ממש של מספרים טבעיים), $(n_k)_{k=0}^\infty$, כך שלכל $k\in\mathbb{N}$ מתקיים $a_{n_k}\geq k$. הואיל ו- $\lim_{k\to\infty}k=\infty$, נובע מ- "משפט הפיצה" שגם $\lim_{k\to\infty}a_{n_k}=\infty$. לסיכום, מצאנו תת-סדרה של $(a_n)_{n=0}^\infty$ שמתכנסת ל- ∞.

9. מצאו סדרה עולה $(a_n)_{n=0}^\infty$ וסדרה יורדת $(b_n)_{n=0}^\infty$ כך ש- $a_n<b_n$ לכל $n\in\mathbb{N}$, אבל $\bigcap_{n=0}^\infty(a_n,b_n)=\emptyset$ (כלומר, החיתוך ריק). כיצד זה מתיישב עם למת קנטור?

פתרון: נגדיר $a_n:=0$ ו- $b_n:=\frac{1}{n}$ לכל $1\leq n\in\mathbb{N}$. אז $(a_n)_{n=0}^\infty$ עולה ו- $(b_n)_{n=0}^\infty$ יורדת, ו- $a_n<b_n$ לכל $n\in\mathbb{N}$. בנוסף, $\bigcap_{n=0}^\infty(a_n,b_n)=\emptyset$, כי אם $x\in\bigcap_{n=0}^\infty(a_n,b_n)$, אז $0<x$, ולכן, לפי אכסיומת ארכימדס, ישנו $1\leq n\in\mathbb{N}$ כך ש- $\frac{1}{n}<x$, ולכן $x\notin(a_n,b_n)$, סתירה.

הדוגמא מתיישבת עם למת קנטור, כי למת קנטור עוסקת בקטעים <u>סגורים</u>, $[a_n,b_n]$.