הוכחת הלמה של יונדה:

נזכור שבנ' שיש התאמה חח"ע ועל

$$\mathrm{Hom}(A,B) \overset{\sim}{\longleftrightarrow} \mathrm{Nat}(h_B,h_A)$$

$$\Psi: \quad \psi \longmapsto \psi^*$$

$$t_B(id_B) \longleftarrow\!\!| \quad t \quad :\Phi$$

נבדוק ש- ① $\Phi\circ\Psi = id$ ו- ② $\Psi\circ\Phi = id$.

הוכחת ①: יהי $\psi: A\longrightarrow B$ מורפיזם ב-$\mathcal{C}$.

$$\Phi(\Psi(\psi)) = \Phi(\psi^*)$$
$$= (\psi^*_B)(id_B) = id_B\circ\psi = \psi \quad \checkmark$$

הוכחת ②: תהי $t: h_B\longrightarrow h_A$ העתקה טבעית.

נכתוב $\psi = \Phi(t) = t_B(id_B) \in \mathrm{Hom}(A,B)$

אז $\Psi(\Phi(t)) = \Psi(\psi) = \psi^*$.

צ"ל ש- $t_X = \psi^*_X$ לכל $X \in \mathcal{C}$.

(אלו פונק' מ- $h_B X$ ל- $h_A X$.)

כלומר, לכל $f \in h_B X = Hom(B, X)$, $t_X(f) = \psi^*_X(f)$.

נזכור כי $h_A f : h_A B \to h_A X$.

$$\begin{tikzcd} h_A B \arrow[r] & h_A X \\ h_B B \arrow[u, "t_B"] \arrow[r, "h_B f"'] & h_B X \arrow[u, "t_X"'] \end{tikzcd}$$

היות ו- $t : h_B \to h_A$ טבעית, (*) $\boxed{h_A f \circ t_B = t_X \circ h_B f}$

כעת,

$$\psi^*_X(f) = f \circ \psi = f \circ \overbrace{t_B(id_B)}^{h_A B \ni}$$

$$= \underbrace{(h_A f)}_{h_A X \leftarrow h_A B}(t_B(id_B)) \overset{(*)}{=} t_X((h_B f)(id_B))$$

$$= t_X(f \circ id_B) = t_X(f)$$

וזה בדיוק מה שרצינו! $\square$

הערה: יש גרסה יותר כללית של הלמה של יונדה, עם אותה הוכחה:

הלמה של יונדה (גרסה כללית):

יהי $\mathcal{C}$ קטגוריה ויהי $B \in \mathcal{C}$.

יהי $F : \mathcal{C} \longrightarrow Set$ פונקטור. אז יש התאמה חח"ע ועל בין

$$\begin{array}{ccc}
Nat(h_B, F) & \overset{\sim}{\longleftrightarrow} & F(B) \\
\psi^* & \longleftarrow\!\!| & \psi \\
t & |\!\!\longrightarrow & t_B(id_B)
\end{array}$$

$t_B : \overset{End(B)}{\overset{\shortparallel}{h_B(B)}} \longrightarrow F B$

כאשר $\psi^*_X : h_B X \longrightarrow F X$ מוגדר ע"י $\psi^*_B(\underset{X \leftarrow B}{f}) = (\underset{FX \leftarrow FB}{Ff})(\psi)$.

[המקרה שאנחנו הוכחנו מתקבל כאשר $F = h_A$.]