סכמות חבורה אפיניות

ברוכים הבאים!

הרצאה 3

תכף נתחיל...

<u>תזכורת:</u> יהי R חוג חילופי.
אלגברה מעל R או R-אלגברה
היא חוג A יחד עם מבנה של R-מודול ש-
לכל $a, a' \in A$, $r \in R$ מתקיים

$$r \cdot (a \cdot a') = (r \cdot a) \cdot a' = a \cdot (r \cdot a')$$

חוג   מודול

<u>אם</u> A חוג ו- $f \subseteq A$ אז נסמן את האידיאל שנוצר ע"י f ב- $\langle f \rangle$.

<u>סימון:</u> אם $f_1, \dots, f_m \in R[x_1, \dots, x_n]$, נגדיר

$$R[x_1, \dots, x_n \mid f_1 = \dots = f_m = 0] = R[x_1, \dots, x_n] / \langle f_1, \dots, f_m \rangle$$

התמונה של x_i ב- $R[x_1, \dots, x_n]/\langle f \rangle$ תסומן ב- $\bar{x}_i$.

<u>משפט חשוב מאוד:</u> תהי $f \subseteq R[x_1, \dots, x_n]$ ותהי A R-אלגברה חילופית.
יש התאמה חח"ע ועל

$$\mathrm{Hom}_{R\text{-alg}}\left(R[x_1, \dots, x_n]/\langle f \rangle, A\right) \xleftrightarrow{\sim} V_f(A) = \{\text{פתרונות של } f \text{ ב- } A^n\}$$

$$\Psi: \phi \longmapsto (\phi(\bar{x}_1), \dots, \phi(\bar{x}_n))$$

$$\text{("הצבה של a")} \quad \phi_a \longleftarrow a = (a_1, \dots, a_n) \quad : \Phi$$

הוכחה: צ"ל ש- ① $\Psi \circ \Phi = id$

② $\Phi \circ \Psi = id$

הוכחת ①: יהי $a \in V_F(A)$, $(a_1,\dots,a_n)$.

$$\Phi(a) = \phi_a$$

$$\Psi(\Phi(a)) = \Psi(\phi_a) = (\phi_a(\bar{x}_1),\dots,\phi_a(\bar{x}_n)) = (a_1,\dots,a_n)$$

[תזכורת: $\phi_a(f(\bar{x}_1,\dots,\bar{x}_n)) = f(a_1,\dots,a_n)$]

הוכחת ②: יהי $\phi : R[x_1,\dots,x_n]/\langle f \rangle \longrightarrow A$

העתקה של R-אלגברות.

צ"ל ש- $\Phi(\Psi(\phi)) = \phi$.

(*) נסמן $a = (a_1,\dots,a_n) := \Psi(\phi) = (\phi(\bar{x}_1),\dots,\phi(\bar{x}_n))$

אז $\Phi(\Psi(\phi)) = \Phi(a) = \phi_a$.

צ"ל ש- $\phi_a = \phi$.

לפי ההגדרה, $\phi_a(\bar{x}_i) \overset{\text{הגדרת } a}{=} a_i \overset{(*)}{=} \phi(\bar{x}_i)$

יהי $\bar{f} \in R[x_1,\dots,x_n]/\langle f \rangle$. ונבחר $g \in R[x_1,\dots,x_n]$ כך ש- $\bar{f} = g + \langle f \rangle$. אז קיימים סקלרים $r_{i_1\dots i_n} \in R$

כך ש- $$\bar{f} = \sum_{i_1,\dots,i_n} r_{i_1\dots i_n} \bar{x}_1^{i_1} \cdots \bar{x}_n^{i_n} \Leftarrow g = \underset{\text{סופי}}{\sum_{i_1,\dots,i_n}} r_{i_1,\dots,i_n} x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n}$$

ולכן $$\boxed{\checkmark}\quad \phi_a(\bar{f}) = \sum_{i_1,\dots,i_n} r_{i_1,\dots,i_n} a_1^{i_1} \cdots a_n^{i_n} \underset{\phi(\bar{x}_i) = a_i}{=} \phi(\bar{f})$$

דוגמאות:

לכל $\mathbb{R}$-אלג' חילופית A,

$$\{(a,b)\in A^2 \mid a^2+b^2=1\} \cong Hom_{\mathbb{R}\text{-}alg}\left(\mathbb{R}[x,y \mid x^2+y^2=1], A\right)$$

למשל, יש העתקה יחידה $\phi: \mathbb{R}[x,y \mid x^2+y^2=1] \to \mathbb{C}$ כך ש- $x \mapsto i$, $y \mapsto \sqrt{2}$.

(הסיבה: $i^2+\sqrt{2}^2=1$.)

הערה: יהיו $\mathcal{F} \subseteq \mathbb{R}[x_1,\dots,x_n]$ ותהיינה A,B שתי $\mathbb{R}$-אלגבראות חילופיות. יהי $\psi: A \to B$ העתקה של אלגבראות. אז יש פונק' $\psi^n: A^n \to B^n$

$$\psi^n(a_1,\dots,a_n) = (\psi(a_1),\dots,\psi(a_n))$$

והיא מצטמצמת לפונקציה

$$V_\mathcal{F}(\psi): \underset{\text{תת } A^n}{V_\mathcal{F}(A)} \longrightarrow \underset{\text{תת } B^n}{V_\mathcal{F}(B)}$$

(הסבר: אם $f \in \mathcal{F}$ ו- $\overset{(a_1,\dots,a_n)}{a} \in V_\mathcal{F}(A)$ אז $f(a)=0$

ולכן $0=\psi(f(a)) = \psi(f(a_1,\dots,a_n)) \underset{\uparrow\ \psi \text{ העתקה } k \text{ אלג'}}{=} f(\psi(a_1),\dots,\psi(a_n))$

$\Leftarrow \psi(a) = (\psi(a_1),\dots,\psi(a_n)) \in V_\mathcal{F}(B)$.)

כעת, לפי המשפט,

$$\begin{array}{ccccccc}
\phi & \in & \mathrm{Hom}_{R\text{-alg}}\left(R[x_1,\dots,x_n]/\langle f\rangle, A\right) & \xrightarrow{\phi \mapsto \psi\circ\phi} & \mathrm{Hom}_{R\text{-alg}}\left(R[x_1,\dots,x_n]/\langle f\rangle, B\right) & \ni & \psi\circ\phi \\
\downarrow & & \updownarrow\wr & & \updownarrow\wr & & \downarrow \\
(\phi(\bar{x}_1),\dots,\phi(\bar{x}_n)) & \in & V_f(A) & \xrightarrow[\text{ } \psi \text{ בכל קווי}]{V_f(\psi)} & V_f(B) & \ni & (\psi(\phi(\bar{x}_1)),\dots,\psi(\phi(\bar{x}_n)))
\end{array}$$

מה החץ המקביל?

תשובה: $\phi \mapsto \psi\circ\phi$

$A \leftarrow R[\bar{x}]/\langle f\rangle$ $\quad$ $B \leftarrow A \leftarrow R[\bar{x}]/\langle f\rangle$

(הסבר בירוק)

מעכשיו:

חוג = חוג חילופי

R-אלגברה = חוג שהוא R-אלג', לא בהכרח חילופי

R-חוג = R-אלגברה חילופית.

מיקום של חוגים

(localization)

<u>תזכורת:</u> תום R תח"ש, שדה השברים של R מוגדר כאוסף מחלקות השקילות הבאו:

$$(R-\{0\})\times R/\sim$$

כאשר $(s,r)\sim(s',r') \iff s'r = sr'$.

כותבים $s^{-1}r$ או $\frac{r}{s}$ עבור $[(s,r)]$. ("$\frac{r}{s}=\frac{r'}{s'}$")

[חיבור וכפל נתונים ע"י

$$\frac{r_1}{s_1}+\frac{r_2}{s_2}=\frac{r_1s_2+r_2s_1}{s_1s_2}$$

$$\frac{r_1}{s_1}\cdot\frac{r_2}{s_2}=\frac{r_1r_2}{s_1s_2}$$

איבר ה-0 הוא $\frac{0}{1}$ והיחידה הוא $\frac{1}{1}$.]

<u>הכללה לחוגים כלליים:</u>

יהי R חוג. קבוצה $S\subseteq R$ נקראת <u>כפלית</u> אם S סגורה לכפל ו- $1_R\in S$ (<u>שקול:</u> S תת-מונויד של $(R,\cdot,1_R)$).

<u>לדוגמא:</u>
- $S=R-\{0\}$ אם R תחום שלמות
- $S=\{1\}$
- $S=R$
- $S=\{1,s,s^2,\dots\}$ כאשר $s\in R$ כלשהו

נגדיר את חוג השברים המוכלל של R ביחס ל-S.

להיות

$$S^{-1}R := S\times R/\sim$$

כאשר $(s_1,r_1)\sim(s_2,r_2)$ אם קיים $s_3\in S$ כך ש- $s_3s_2r_1=s_3s_1r_2$ $\Longleftrightarrow$ $s_1^{-1}r_1=s_2^{-1}r_2$

(אם אין מחלקי 0 ב-R ו- $0\notin S$ זה שקול ל- $s_2r_1=s_1r_2$)

תרגיל: $\sim$ יחס שקילות.

נסמן את $[(s,r)]$ ב- $s^{-1}r$.

משפט: $S^{-1}R$ הוא R-חוג ביחס לפעולות הבאות:

$$s_1^{-1}r_1+s_2^{-1}r_2:=(s_1s_2)^{-1}(s_2r_1+s_1r_2)$$

$$s_1^{-1}r_1\cdot s_2^{-1}r_2=(s_1s_2)^{-1}(r_1r_2)$$

$$r\cdot(s_1^{-1}r_1)=s^{-1}(rr_1)$$

$$\Downarrow$$

$$\left(\begin{array}{l} i_{S^{-1}R}: R\longrightarrow S^{-1}R \\ \qquad r\longmapsto 1^{-1}r \end{array}\right)$$

דוגמאות: ① אם R תחום שלמות ו- $S=R\setminus\{0\}$, אז $S^{-1}R$ הוא $\mathrm{Frac}(R)$ (שדה השברים של R)

② אם $S=\{1,s,s^2,\dots\}$ עבור $s\in R$ כלשהו, מסמנים את $S^{-1}R$ כ- R_s.

$$R_s=\left\{s^{-n}r \;\middle|\; \begin{array}{c} n\in\mathbb{N}\cup\{0\} \\ r\in R \end{array}\right\}$$

שימו לב: $s^{-n}r_1 = s^{-m}r_2 \iff s^k s^m r_1 = s^k s^n r_2$

עבור $k \geq 0$ כלשהו.

דוגמה: ההעתקה $i = i_{S^{-1}R} : R \to S^{-1}R$, $r \mapsto 1^{-1}r$

זו תמיד חח"ע!

טענה: $\mathrm{Ker}\left(i_{S^{-1}R} : R \to S^{-1}R,\ r \mapsto 1^{-1}r \right) = \{ r \in R \mid \text{קיים } s \in S \text{ עם } \underbrace{rs = 0}_{\Downarrow} \}$

"$1^{-1}r = s^{-1}(rs) = s^{-1}0 = 0$"

הוכחה: $1^{-1}r = 1^{-1}0 \iff$ קיים $s \in S$ כך ש- $s \cdot 1 r = s \cdot 1 0$

$[(1,r)] = [(1,0)]$

$\iff$ —"— $sr = 0$. $\square$

מסקנה: אם ב-S אין מחלקי 0, $i : R \to S^{-1}R$ חח"ע.

הערה: לכל $s \in S$ התמונה $i(s) = 1^{-1}s \in S^{-1}R$ הנו אוביר הפיך ב-$S^{-1}R$.

הסיבה:

$1^{-1}s \cdot s^{-1}1 = (1 \cdot s)^{-1} \cdot (s \cdot 1) = s^{-1}s = 1^{-1}1 = 1_{S^{-1}R}$

$1 \cdot s = s \cdot 1$

טענה: תהי $\phi : R \to T$ העתקה של חוגים. תהי S קבוצה כפלית ב-R כך ש- $\phi(S) \subseteq T^{\times}$.

אז קיימת העתקה יחידה $\phi' : S^{-1}R \to T$ כך ש-

$\phi'(1^{-1}r) = \phi(r)$ לכל $r \in R$.

$\phi\left(\frac{r}{1}\right)$

במילים אחרות:

$$\begin{tikzcd} R \arrow[rr, "\phi"] \arrow[dr, "i"'] & & T \\ & S^{-1}R \arrow[ur, dashed, "\exists!\phi'"'] & \end{tikzcd}$$

(הדיאגרמה מתחלפת)

הוכחה (מקוצרת):

נגדיר $\phi' : S^{-1}R \to T$ ע"י

$$\phi'(s^{-1}r) = \underbrace{\phi(s)^{-1}}_{\text{קיים כי } \phi(s)\in T^{\times}} \phi(r)$$

צריך לבדוק שכך העתקה של מוגדרת היטב.

נבדוק שהיא מוג' היטב: אם $s_1^{-1}r_1 = s_2^{-1}r_2$

אז קיים $s_3\in S$ כך ש- $s_3s_2r_1 = s_3s_1r_2$ ב-R

$\Leftarrow$ $\phi(s_3s_2r_1) = \phi(s_3s_1r_2)$ ב-T

$\Leftarrow$ $\cancel{\phi(s_3)}\phi(s_2)\phi(r_1) = \cancel{\phi(s_3)}\phi(s_1)\phi(r_2)$

היות ו- $\phi(s_1), \phi(s_2), \phi(s_3)$ הפיכים ב-T, $\cdot\ \phi(s_1)^{-1}\phi(s_2)^{-1}$

$$\Big[\cdot\ \phi'(s_1^{-1}r_1) = \phi(s_1)^{-1}\phi(r_1) = \phi(s_2)^{-1}\phi(r_2) = \phi'(s_2^{-1}r_2)$$

זה מוכיח את הקיום של ϕ'.

כדי להוכיח יחידות: לכל $s\in S$ מתקיים $\phi'(\frac{s}{1}) = \phi(s)$

$\Leftarrow$ $\phi(s)\cdot\phi'(s^{-1}1) = \phi'(1^{-1}s)\cdot\phi'(s^{-1}1) = 1_T$. לכן $\phi'(s^{-1}1) = \phi(s)^{-1}$.

לסיום: $\phi'(s^{-1}r) = \phi'(s^{-1}1\cdot 1^{-1}r) = \phi'(s^{-1}1)\cdot\phi'(1^{-1}r) = \phi(s)^{-1}\phi(r)$. $\square$

קטגוריה

הגדרה: (לא שווה חשיבה)

מחלקה M היא אוסף כל הקבוצות המקיימות ~~הפסוק~~ נוסחא עם משתנה חופשי יחיד מסויים. כלומר $x \in M$ אם הפסוק מתקיים עבור x.

דוגמאות - מחלקת כל החבורות.
- כל החוגים
- כל הקבוצות
- כל המרחבים הוקטוריים מעל $\mathbb{R}$.

מחלקה לרוב איננה **קבוצה**. אבל, כל קבוצה A עצמה מחלקה (היא אוסף האיברים המקיימים את הפסוק $x \in A$).