<u>שאלה 1</u>

$$B=\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\0\\-2\end{bmatrix}\right\}, \quad C=\left\{\begin{bmatrix}2\\2\\-2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\0\\3\end{bmatrix}\right\} \quad \text{א}$$

בסיס ל-$\mathbb{R}^3$ בסיס ל-$\mathbb{R}^3$

$$T:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}^3 \qquad T\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2x-z\\y+z-x\\y-2z\end{bmatrix}$$

$$T\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\cdot1-0\\1+0-1\\1-2\cdot0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix} \qquad T\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\2\\-1\end{bmatrix} \qquad T\begin{bmatrix}1\\0\\-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\-3\\4\end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}2&1&2&2&-1&4\\2&0&0&0&2&-3\\-2&2&3&1&-1&4\end{array}\right]\xrightarrow[R_2\leftrightarrow R_1]{R_3\leftarrow R_3+R_2}\left[\begin{array}{ccc|ccc}2&0&0&0&2&-3\\2&1&2&2&-1&4\\0&2&3&1&1&1\end{array}\right]\xrightarrow[R_1\leftarrow\frac{1}{2}R_1]{R_2\leftarrow R_2-R_1}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&0&1&-3/2\\0&1&2&2&-3&7\\0&2&3&1&1&1\end{array}\right]\xrightarrow{R_3\leftarrow R_3-2R_2}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&0&1&-3/2\\0&1&2&2&-3&7\\0&0&-1&-3&7&-13\end{array}\right]\xrightarrow[R_3\leftarrow -R_3]{R_2\leftarrow R_2+2R_3}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&0&1&-3/2\\0&1&0&-4&11&-19\\0&0&1&3&-7&13\end{array}\right] \qquad \boxed{[T]^B_C=\begin{bmatrix}0&1&-3/2\\-4&11&-19\\3&-7&13\end{bmatrix}}$$

$\mathbb{F} = \mathbb{Z}_5$ ב

$B = \{x - x^2, \bar{3}x, \bar{1}+x^2\}$, $C = \{\bar{1}+\bar{2}x^2, x^3+\bar{4}x+\bar{2}, x^2, x\}$

בסיס ל- $\mathbb{F}_2[x]$ בסיס ל- $\mathbb{F}_3[x]$

$T : \mathbb{F}_2[x] \longrightarrow \mathbb{F}_3[x]$, $Tf = x\cdot f(x) - f(x+\bar{1})$

$$\begin{aligned}
T(x-x^2) &= x\cdot(x-x^2) - \left((x+\bar{1}) - (x+\bar{1})^2\right) \\
&= x^2 - x^3 - (x+\bar{1} - x^2 - \bar{2}x - \bar{1}) \\
&= x^2 - x^3 - x - \cancel{\bar{1}} + x^2 + \bar{2}x + \cancel{\bar{1}} \\
&= x + \bar{2}x^2 - x^3 = x + \bar{2}x^2 + \bar{4}x^3 \\
T(\bar{3}x) &= x\cdot(\bar{3}x) - \bar{3}(x+\bar{1}) = \bar{3}x^2 - \bar{3}x - \bar{3} \\
&= \bar{3}x^2 + \bar{2}x + \bar{2} \\
T(1+x^2) &= x(\bar{1}+x^2) - (\bar{1} + (x+\bar{1})^2) \\
&= x + x^3 - (\bar{1} + x^2 + \bar{2}x + \bar{1}) \\
&= x + x^3 - \bar{1} - x^2 - \bar{2}x - \bar{1} = x^3 + \bar{4}x^2 + \bar{4}x + \bar{3}
\end{aligned}$$

נזהה את $\mathbb{F}_3[x]$ עם $(\mathbb{Z}_5)^4$ ע"י

$(a,b,c,d) \leftrightsquigarrow a+bx+cx^2+dx^3$

$$\left[\begin{array}{cccc|ccc}
\bar{1} & \bar{2} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{2} & \bar{3} \\
\bar{0} & \bar{4} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{2} & \bar{4} \\
\bar{2} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{2} & \bar{3} & \bar{4} \\
\bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{4} & \bar{0} & \bar{1}
\end{array}\right]
\xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3 - 2R_1}
\left[\begin{array}{cccc|ccc}
\bar{1} & \bar{2} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{2} & \bar{3} \\
\bar{0} & \bar{4} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{2} & \bar{4} \\
\bar{0} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{2} & \bar{4} & \bar{3} \\
\bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{4} & \bar{0} & \bar{1}
\end{array}\right]
\xrightarrow[\substack{R_2 \leftarrow R_2 + R_4 \\ R_3 \leftarrow R_3 - R_4}]{R_1 \leftarrow R_1 - 2R_4}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|ccc}
\bar{1} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{2} & \bar{2} & \bar{1} \\
\bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{2} & \bar{0} \\
\bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{3} & \bar{4} & \bar{2} \\
\bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{4} & \bar{0} & \bar{1}
\end{array}\right]
\xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_4}
\left[\begin{array}{cccc|ccc}
\bar{1} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{2} & \bar{2} & \bar{1} \\
\bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{4} & \bar{0} & \bar{1} \\
\bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{3} & \bar{4} & \bar{2} \\
\bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{2} & \bar{0}
\end{array}\right]$$

$$\boxed{[T]^B_C = \begin{bmatrix} \bar{2} & \bar{2} & \bar{1} \\ \bar{4} & \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{3} & \bar{4} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{2} & \bar{0} \end{bmatrix}}$$

$$B=\left\{\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}\right\},\quad C=\left\{\begin{bmatrix}i&i\\1&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0\\0&2i\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0\\1&1\end{bmatrix}\right\}\quad \text{ג}$$

$$T: M_{2\times2}(\mathbb{C})\to M_{2\times2}(\mathbb{C}),\quad TA=\begin{bmatrix}1+i&0\\2&1+i\end{bmatrix}A-A\begin{bmatrix}1+i&0\\2&1+i\end{bmatrix}$$

$$T\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1+i&0\\2&1+i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1+i&0\\2&1+i\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1+i&0\\2&0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1+i&0\\0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\2&0\end{bmatrix}$$

$$T\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1+i&0\\2&1+i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1+i&0\\2&1+i\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1+i\\0&2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2&1+i\\0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2&0\\0&2\end{bmatrix}$$

$$T\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1+i&0\\2&1+i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1+i&0\\2&1+i\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\1+i&0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0&0\\1+i&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$$

$$T\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1+i&0\\2&1+i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1+i&0\\2&1+i\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&1+i\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0&0\\2&1+i\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\-2&0\end{bmatrix}$$

נזהה את $M_{2\times2}(\mathbb{C})$ עם $\mathbb{C}^4$ ע"י

$$(a,b,c,d)\leftarrow\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc}i&0&0&0&0&-2&0&0\\i&0&1&0&0&0&0&0\\1&0&1&1&2&0&0&-2\\0&2i&0&1&0&2&0&0\end{array}\right]\xrightarrow[R_3\leftarrow R_3+iR_1]{R_2\leftarrow R_2-R_1}\left[\begin{array}{cccc|cccc}i&0&0&0&0&-2&0&0\\0&0&1&0&0&2&0&0\\0&0&1&1&2&-2i&0&-2\\0&2i&0&1&0&2&0&0\end{array}\right]\xrightarrow[R_1\leftarrow -iR_1]{R_3\leftarrow R_3-R_2}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&0&0&2i&0&0\\0&0&1&0&0&2&0&0\\0&0&0&1&2&-2-2i&0&-2\\0&2i&0&1&0&2&0&0\end{array}\right]\xrightarrow[R_2\leftrightarrow R_3]{R_4\leftarrow R_4-R_3}\left[\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&0&0&2i&0&0\\0&0&0&1&2&-2-2i&0&-2\\0&0&1&0&0&2&0&0\\0&2i&0&0&-2&4+2i&0&2\end{array}\right]\xrightarrow[R_4\leftrightarrow R_2]{R_4\leftarrow -\frac{1}{2}iR_4}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&0&0&2i&0&0\\0&1&0&0&i&1-2i&0&-i\\0&0&1&0&0&2&0&0\\0&0&0&1&2&-2-2i&0&-2\end{array}\right]\qquad \boxed{[T]_C^B=\begin{bmatrix}0&2i&0&0\\i&1-2i&0&-i\\0&2&0&0\\2&-2-2i&0&-2\end{bmatrix}}$$

שאלה 2

הוכחה:

(א) $A \sim A$ כי $A = IAI^{-1}$.

(ב) נניח כי $A \sim B$. אז קיים $P \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$ הפיכה כך
ש- $B = PAP^{-1}$. נכפול מימין ב-P ומשמאל ב-P^{-1} ונקבל
$(P^{-1})B(P^{-1})^{-1} = A \Leftarrow P^{-1}BP = A$.
כיון ו-P^{-1} הפיכה, $B \sim A$.

(ג) נניח כי $A \sim B, B \sim C$. אז קיימות מטריצות
הפיכות P, Q כך ש- $B = PAP^{-1}$ ו- $C = QBQ^{-1}$.
המטריצה QP הפיכה ומתקיים
$(QP)A(QP)^{-1} = QPAP^{-1}Q^{-1} = QBQ^{-1} = C$
לכן $A \sim C$. $\square$

שאלה 3

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 4a & 1 & a+1 & 2+i \\ 2 & 1 & 2 & -1 \\ a-1 & 1 & 1 & 2i \end{array}\right] \xrightarrow[R_3 \leftarrow 2R_3-(a-1)R_2]{R_1 \leftarrow R_1 - 2aR_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1-2a & 1-3a & 2+i+2a \\ 2 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3-a & 4-2a & 4i+a-1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_1} (*) \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1-2a & 1-3a & 2+i+2a \\ 0 & 3-a & 4-2a & 4i-1+a \end{array}\right] \xrightarrow{R_3 \leftarrow (a-3)R_2 + (1-2a)R_3}$$

$a \neq \frac{1}{2}$

$$(**) \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1-2a & 1-3a & (2+i)+2a \\ 0 & 0 & a^2+1 & (-7+i)+(-1-7i)a \end{array}\right]$$

$$(a-3)(1-3a)+(1-2a)(4-2a) = a-3-3a^2+9a+4-8a-2a+4a^2 = a^2+1$$

$$(a-3)(2+i+2a)+(1-2a)(4i-1+a) = (2+i)a+(-6-3i)+2a^2-6a+(4i-1)+a+(2-8i)a-2a^2$$

$$= [2+i-6+1+2-8i]a+[-6-3i+4i-1] = (-7+i)+(-1-7i)a$$

עבור $a^2+1\neq 0$ וגם $1-2a\neq 0$ יש פתרון יחיד

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$a \neq \pm i \qquad\qquad a \neq \frac{1}{2}$$

עבור $a=\frac{1}{2}$ נקבל מ-(*)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & * \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & * \\ 0 & \frac{5}{2} & 3 & * \end{array}\right]$$

לכן כאשר $a=\frac{1}{2}$ יש פתרון יחיד

נבדוק את $a=i$: נציב ב-(**) ונקבל

$$\begin{array}{c}\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1-2i & 1-3i & 2+i+2i \\ 0 & 0 & 0 & \underset{=0}{-7+i-i-7} \end{array}\right] \leftarrow \text{שורת אפסים} \\ \begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \text{מוביל} & \text{מוביל} & \text{חופשי} \end{array}\end{array}$$

לכן עבור $a=i$ יש אינסוף פתרונות

נבדוק את $a=-i$: נציב ב- (**) ונקבל

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1+2i & 1+3i & 2+i-2i \\ 0 & 0 & 0 & \underset{\neq 0}{-7+i+i-7} \end{array}\right]$$

לכן כאשר $a=-i$ אין פתרון.

לסיכום:

א) יש פתרון יחיד בדיוק כאשר $a \neq \pm i$.

ב) יש אינסוף פתרונות כאשר $a=i$.

ג) אין פתרון כאשר $a=-i$.

שאלה 4

$$T:V\to V \quad , \quad T^3=T^2$$

(א) נתון כי v עצמי, הוכח ש- $Tv=v$ או $Tv=0$.

הוכחה: אם $v=0$, אז $Tv=0$ וסיימנו.
נניח כי $v\neq 0$.
היות ו- v עצמי אז זה אומר שקיים $\alpha\in F$ כך ש- $Tv=\alpha v$.

לכן,
$$T^2v = TTv = T\alpha v = \alpha Tv = \alpha^2 v$$
$$T^3v = TT^2v = T\alpha^2 v = \alpha^2 Tv = \alpha^3 v$$

לכן $\alpha^2 v=\alpha^3 v \Rightarrow (\alpha^2-\alpha^3)v=0$.
היות ו- $v\neq 0$, $\alpha^2(\alpha-1)=\alpha^2-\alpha^3=0$.

בשדה אין מחלקי 0 ולכן $\alpha=1$ או $\alpha=0$.
אם $\alpha=1$ אז $Tv=v$.
ואם $\alpha=0$ אז $Tv=0$. □

(ב) נתון כי $T\neq id_V$. הוכח ש- $\ker T\neq 0$.

הוכחה: היות ו- $T\neq id_V$ קיים $v\in V$ כך ש- $Tv-v\neq 0$.
מתקיים $T(T(Tv-v)) = T^3v-T^2v = T^2v-T^2v=0$.
לכן, אם $T(Tv-v)\neq 0$ אז $0\neq T(Tv-v)\in \ker T$
ואם $T(Tv-v)=0$ אז $0\neq Tv-v\in \ker T$.
בכל מקרה קיבלנו שיש וקטור שונה מ-0 ב-$\ker T$. □