

1.1.1

$$Tf = f(x^2) \quad \text{אם } T: F[x] \rightarrow F[x] \quad (1)$$

T היא תהליך אינברסיה

הוכחה: $\alpha \in F, f, g \in F[x]$ נניח

$$T(f+g) = (f+g)(x^2) = f(x^2) + g(x^2) = Tf + Tg$$

$$T(\alpha f) = (\alpha f)(x^2) = \alpha \cdot f(x^2) = \alpha \cdot Tf$$

□

$$T(A) = A^2 \quad \text{אם } T: M_{n \times n}(F) \rightarrow M_{n \times n}(F) \quad (2)$$

T היא תהליך אינברסיה

הוכחה: $F = \mathbb{R}$ נניח

$$\square T(2I_n) = (2I_n)^2 = 4I_n \neq 2I_n = 2T(I_n)$$

$$T(A) = AB - BA \quad \text{אם } T: M_{n \times n}(F) \rightarrow M_{n \times n}(F) \quad (3)$$

($B \in M_{n \times n}(F)$)

T היא תהליך אינברסיה

הוכחה: $\alpha \in F, X, Y \in M_{n \times n}(F)$ נניח

$$T(X+Y) = (X+Y)B - B(X+Y) = XB + YB - BX - BY$$

$$= (XB - BX) + (YB - BY) = TX + TY$$

$$T(\alpha X) = (\alpha X)B - B(\alpha X) = \alpha XB - \alpha BX = \alpha(XB - BX) = \alpha TX$$

□

$$Tz = \bar{z} \quad \text{אם } T: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \quad (4)$$

($\mathbb{C}$ הוא $\mathbb{C}$)

T היא תהליך אינברסיה

$$T(i \cdot 1) = T(i) = \bar{i} = -i$$

$$\cdot i \cdot T(1) = i \cdot \bar{1} = i \neq$$

כל

הוכחה

$$Tz = \bar{z} \quad \forall z \in \mathbb{C} \quad T: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \quad (1)$$

(R is N C)

T is linear!

si $\alpha \in \mathbb{R}^{-1}$ $z, w \in \mathbb{C}$ in linearity

$$T(z+w) = \overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w} = Tz + Tw$$

$$T(\alpha z) = \overline{\alpha z} = \alpha \cdot \bar{z} = \alpha \bar{z} = \alpha Tz$$

$\alpha \in \mathbb{R}$

□

linear space

$$C = \{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ is linear}\} \quad (1)$$

$$Tf = f' \quad \forall f \in C \quad T: C \rightarrow C$$

T is linear!

si $\alpha \in \mathbb{R}^{-1}$ $f, g \in C$ in linearity

$$T(f+g) = (f+g)' = f' + g' = Tf + Tg$$

$$T(\alpha f) = (\alpha f)' = \alpha f' = \alpha Tf$$

□

2.7.10

$$T: (\mathbb{Z}_5)^3 \rightarrow (\mathbb{Z}_5)^4, \quad T \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{1} & \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{1} & \bar{1} & \bar{2} \\ \bar{2} & \bar{2} & \bar{4} \\ \bar{4} & \bar{3} & \bar{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

נמצא את $\ker T$ ו- $\operatorname{im} T$ באמצעות טבלאות מחזוריות

$$\begin{array}{c} \left[\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{1} & \bar{1} & \bar{2} & \bar{0} \\ \bar{2} & \bar{2} & \bar{4} & \bar{0} \\ \bar{4} & \bar{3} & \bar{2} & \bar{0} \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{R_3 \leftarrow R_3 - 2R_2 \\ R_2 \leftarrow R_2 - R_1 \\ R_4 \leftarrow R_4 + R_1}} \left[\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{3} & \bar{3} & \bar{0} \end{array} \right] \xrightarrow{R_4 \leftarrow R_4 - 3R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \end{array} \right] \end{array}$$

↑ ↑
מחזורי מחזורי

$$\begin{array}{lcl} y = -t & \Leftrightarrow & y + z = \bar{0} \\ x = -t & \Leftrightarrow & x + z = \bar{0} \end{array} \quad \text{כאשר } z = t$$

$$\ker T = \left\{ \begin{bmatrix} -t \\ -t \\ t \end{bmatrix} \mid t \in \mathbb{Z}_5 \right\} = \left\{ t \begin{bmatrix} \bar{4} \\ \bar{4} \\ \bar{1} \end{bmatrix} \mid t \in \mathbb{Z}_5 \right\}$$

$$\ker T = \left\{ \begin{bmatrix} \bar{4} \\ \bar{4} \\ \bar{1} \end{bmatrix} \right\}$$

נמצא את $\operatorname{im} T$ באמצעות טבלאות מחזוריות

הטבלאות המחזוריות של T (מחזורי) הם אלה:

$$\left[\begin{array}{cccc} \bar{1} & \bar{1} & \bar{2} & \bar{4} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} & \bar{3} \\ \bar{1} & \bar{2} & \bar{4} & \bar{2} \end{array} \right] \xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3 - R_2} \left[\begin{array}{cccc} \bar{1} & \bar{1} & \bar{2} & \bar{4} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} & \bar{3} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} & \bar{3} \end{array} \right] \xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3 - R_2} \left[\begin{array}{cccc} \bar{1} & \bar{1} & \bar{2} & \bar{4} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} & \bar{3} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \end{array} \right]$$

$$\operatorname{im} T = \left\{ \begin{bmatrix} \bar{1} \\ \bar{1} \\ \bar{2} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \bar{0} \\ \bar{1} \\ \bar{3} \end{bmatrix} \right\}$$

3.7.10

$$U = \text{span}\{(0, -1, 1, 1, 1), (-1, 0, 1, 0, 1), (1, -1, 2, 1, 2)\}$$

$$V = \text{span}\{(2, 1, 3, 0, 2), (2, 0, 2, 1, 1), (1, 1, 2, 0, 1)\}$$

:U - פ'ים ב-3 (10)

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_1 \leftrightarrow R_2]{R_3 \leftarrow R_3 + R_2} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3 - R_2} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

אין שורה האחרונה המקוונת ב-1.

$$U = \text{פ'ים ב-3} \{(-1, 0, 1, 0, 1), (0, -1, 1, 1, 1), (0, 0, 2, 0, 2)\}$$

$$(U = \text{פ'ים ב-3} \{(0, -1, 1, 1, 1), (-1, 0, 1, 0, 1), (1, -1, 2, 1, 2)\})$$

:V - פ'ים ב-3

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_2 \leftarrow R_2 - 2R_3]{R_1 \leftarrow R_1 - R_2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_1 \leftrightarrow R_3]{R_2 \leftarrow R_2 + 2R_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\{(1, 1, 2, 0, 1), (0, 1, 1, -1, 1), (0, 0, 0, -1, 1)\}$$

פ'ים ב-3

(1, 3) פ'ים ב-3 $U+V$ המרחב $U+V$ (10)

ב-3 פ'ים ב-3 $U+V$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_4 \leftarrow R_4 + R_1} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{R_4 \leftarrow R_4 + R_2 \\ R_5 \leftarrow R_5 + R_2}} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{R_5 \leftarrow R_5 - R_3 \\ R_4 \leftarrow R_4 - 2R_3}} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_6 \leftarrow R_6 - R_4} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\{(-1, 0, 1, 0, 1), (0, -1, 1, 1, 1), (0, 0, 2, 0, 2), (0, 0, 0, 1, -1)\} \text{ is a basis for } U+V$$

Therefore $\dim(U+V) = 4$

$$\dim(U \cap V) = \dim U + \dim V - \dim(U+V) = 3 + 3 - 4 = 2$$

$$\dim T = V \Rightarrow \ker T = U \quad \text{for } T: \mathbb{Q}^5 \rightarrow \mathbb{Q}^5 \quad \text{p. 110 (2)}$$

$$\dim \operatorname{Im} T + \dim \ker T = 5, \text{ so } T \text{ is not full rank}$$

$$\dim V + \dim U = 3 + 3 = 6$$

rank

Therefore T is not full rank

4 שלב

הוכחה: $\exists u \in U$ כזה $Tu = T'u$

הי"א 1- S ולי u $u_1, \dots, u_r \in S$ ק"י"ק
 $u = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_r u_r$ $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in F$ כן
 ג"כ $Tu_i = T'u_i$ $i=1, \dots, r$ T T' $Tu = T(\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_r u_r)$
 $= \alpha_1 Tu_1 + \dots + \alpha_r Tu_r$
 $= \alpha_1 T'u_1 + \dots + \alpha_r T'u_r = T'(\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_r u_r) = T'u$

□

5 שלב

① $S' = \{Tu \mid u \in S\}$ הוכחה: $\exists$ -

הי"א $u_1, \dots, u_r \in S'$ וקטורים שונים $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in F$
 כך $\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_r u_r = 0$ $\alpha_1 = \dots = \alpha_r = 0$ $\exists$ -

הי"א 1- $u_i \in S$ ק"י $v_i = Tu_i$ $v_i \in S'$
 הווקטורים $u_1, \dots, u_r \in S$ הם שונים $v_1, \dots, v_r$ שונים

$T(\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_r u_r) = \alpha_1 Tu_1 + \dots + \alpha_r Tu_r = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_r v_r = 0$
 הי"א 1- $\ker T = 0$ S $\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_r u_r = 0$

□ S קבוצה $\alpha_1 = \dots = \alpha_r = 0$ $\exists$ S קבוצה

② $B = \{u \mid u \in S\}$ $B' = \{Tu \mid u \in B\}$ B B' V U $T: U \rightarrow V$ $T \cdot 0 = 0$ S $B = \emptyset$ $B' = \emptyset$ $V = \mathbb{R}$ $U = \{0\}$ $F = \mathbb{R}$ $U = \{0\}$ $V = \mathbb{R}$ $T: U \rightarrow V$ $B = \emptyset$ $B' = \emptyset$ $V = \mathbb{R}$ $U = \{0\}$

בסוף

$\forall v \in V$ אם $T^n v = v$ - לכן $n \in \mathbb{N}$ קיים כך ש-
(המשפט נחשב, $T^n = \text{id}_V$)

נניח כי $\ker T = 0$: אם $v \in \ker T$ אז $Tv = 0$ ולכן
 $v = T^n v = T^{n-1} Tv = T^{n-1}(0) = 0$

נניח כי $\text{im } T = V$: כלומר $\text{im } T \subseteq V$: דרך אחרת
- $\text{im } T \supseteq V$

יהי $v \in V$ אז $T(T^{n-1}v) = T^n v = v$
 $\square$ $v \in \text{im } T$

7

$$U = \{(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n \alpha_i = 0\}$$

$$V = \{(\underbrace{\alpha_1, \dots, \alpha_n}_{\alpha}) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$$

(א) כי $U \cap V = 0$: יהי $v \in U \cap V$ אז $v \in U$ ו- $v \in V$

אם $v = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in U$ אז $\sum \alpha_i = 0$ ו- $v \in V$ אז $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = \alpha$
אם $v = 0$ אז $\alpha = 0$ ולכן $\alpha \cdot n = \alpha + \dots + \alpha = 0$

(ב) כי $U + V = \mathbb{R}^n$: יהי $w = (\beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathbb{R}^n$

$$u = (\beta_1 - \alpha, \dots, \beta_n - \alpha) \quad \alpha = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \beta_i$$

$$v = (\alpha, \dots, \alpha)$$

$$\sum_{i=1}^n (\beta_i - \alpha) = \sum_{i=1}^n \beta_i - \alpha \cdot n = \sum_{i=1}^n \beta_i - \sum_{i=1}^n \beta_i = 0$$

לכן $w = u + v \in U + V$ - כלומר $U + V = \mathbb{R}^n$

$$\underline{R^n = U \oplus V} \quad \text{וכן}$$

המרחב V נבדל $\{ \underbrace{(1, \dots, 1)}_n \}$ שהוא קבוצה

$$\boxed{\dim V = 1} \quad \text{בגודל 1 עם איבר אחד בלבד}$$

$$\text{הוא } U \oplus V = R^n \quad \text{נכון}$$

$$\boxed{\dim U = \dim R^n - \dim V = n - 1}$$

(הערה: בדרך כלל לא נבחרת בסיס של U ושל V שיהיו קבוצה)

$$\{e_1 - e_2, e_2 - e_3, \dots, e_{n-1} - e_n\}$$

(ע"פ V)

8. אלמנטים

$$U = \{ A \in M_{n \times n}(F) : A^t = A \}$$

$$\text{, } \text{char } F \neq 2$$

$$V = \{ A \in M_{n \times n}(F) : A^t = -A \}$$

$$E_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ i \rightarrow 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

וכן

$$E_{ij}^t = E_{ji}$$

-1

$$\dim U = \frac{n^2 + n}{2} \quad (10)$$

$$B = \{ E_{11}, \dots, E_{nn} \} \cup \{ E_{ij} + E_{ji} \mid 1 \leq i < j \leq n \}$$

$$n + (1 + 2 + \dots + (n-1)) = \frac{n^2 + n}{2}$$

קבוצה B ע"פ

אם B הוא סבב ב- U אז B הוא סבב ב- U .

$$(E_{ij} + E_{ji})^t = E_{ji} + E_{ij} \quad \text{ו-} \quad E_{ii}^t = E_{ii} \quad \text{לכן} \quad B \subseteq U$$

הוכחה כי B הוא סבב ב- U :

נניח $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ מתוך $M_n(F)$ שבו $a_{ij} = a_{ji}$.

$$\begin{aligned} A &= \sum_{i,j=1}^n a_{ij} E_{ij} = \sum_{i=1}^n a_{ii} E_{ii} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n (a_{ij} E_{ij} + a_{ji} E_{ji}) \\ &= \sum_{i=1}^n a_{ii} E_{ii} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n a_{ij} (E_{ij} + E_{ji}) \in \text{Span } B \end{aligned}$$

$$a_{ij} = a_{ji}$$

הוכחה כי B הוא סבב ב- U : נניח $\{a_{ij}\}_{1 \leq i < j \leq n} \subseteq F$ שבו $a_{ij} = a_{ji}$.

$$0_{n \times n} = \sum_{i=1}^n a_{ii} E_{ii} + \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij} (E_{ij} + E_{ji})$$

$$0_{n \times n} = \sum_{i=1}^n a_{ii} E_{ii} + \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij} E_{ij} + \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij} E_{ji}$$

היותו של $\{E_{ij} \mid 1 \leq i < j \leq n\}$ בסיס ב- U (הוא סבב ב- U) נובע מכך ש-

כל $a_{ij} = 0$ עבור $1 \leq i < j \leq n$.

לסיכום הוכחנו כי B הוא סבב ב- U , כדבר שביקשנו.

$$\dim V = \frac{n^2 - n}{2} \quad \text{Ⓟ}$$

הוא בדיוק ממדין הסבבים הריגוריים ב- $M_{n \times n}(F)$, כלומר $U \oplus V = M_{n \times n}(F)$.

$$\dim V = \dim M_{nn}(F) - \dim U = n^2 - \frac{n^2+n}{2} = \frac{n^2-n}{2}$$

(הערה: כאן אומר שיש לנו $\dim V = \frac{n^2-n}{2}$ וזה נכון)

$$B = \{E_{ij} - E_{ji} \mid 1 \leq i < j \leq n\}$$

$$\left(\dim V = \frac{n^2-n}{2} \right) \text{ שכן } 1+2+\dots+(n-1) = \frac{n^2-n}{2}$$

$$T(A) = A + A^t$$

$$T: M_{nn}(F) \rightarrow M_{nn}(F) \quad (2)$$

$$\dim T = U \quad \dim \ker T = V$$

$$\Leftrightarrow A \in \ker T : \ker T = V$$

$$A \in V \Leftrightarrow A = A^t \Leftrightarrow A + A^t = TA = 0$$

$$(TA)^t = (A + A^t)^t = A^t + A^{tt} = A + A^t = TA$$

$$\dim T \subseteq U \quad \text{כל } TA \in U$$

$$A = \frac{1}{2}B \quad (B \in U) : \dim T \supseteq U$$

$$TA = A + A^t = \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}B^t = \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}B = B$$

$B = B^t$

$$\square \quad \dim T = U \quad B \in \dim T$$

$$\frac{n^2+n}{2} \text{ (3) } \text{ שכן } \dim T = \frac{n^2-n}{2} \text{ וזה נכון}$$

: $\ker T = U$ הוכחה

$u_1, \dots, u_r \in \ker T$ וכן $Tu_i = 0$ לכל $1 \leq i \leq r$ ולכן

$U = \text{Span}\{u_1, \dots, u_r\} \subseteq \ker T$ הוכחה

עכשיו נראה ש- $\ker T \subseteq U$. $U \supseteq \ker T$ הוכחה

נניח $v \in \ker T$. אז $v = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_r u_r + \alpha_{r+1} u_{r+1} + \dots + \alpha_{r+s} u_{r+s}$ ו- $\alpha_1, \dots, \alpha_{r+s} \in F$

$$0 = Tv = \alpha_1 \underset{0}{Tu_1} + \dots + \alpha_r \underset{0}{Tu_r} + \alpha_{r+1} Tu_{r+1} + \dots + \alpha_{r+s} Tu_{r+s}$$

$$= \alpha_{r+1} w_1 + \dots + \alpha_{r+s} w_s$$

אבל $\alpha_{r+1} = \dots = \alpha_{r+s} = 0$, ולכן $w_1, \dots, w_s = 0$.

לכן $v = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_r u_r \in \text{Span}\{u_1, \dots, u_r\} = U$

□

הוספה

Ⓢ $\dim(U \cap W) + \dim(U + W) = \dim U + \dim W = \dim V$

$\dim(U \cap W) + \dim(U + W) = \dim U + \dim W = \dim V$

אם U, W תת-חלליות של V אז $\dim(U \cap W) + \dim(U + W) = \dim U + \dim W = \dim V$

כלומר $T: V \rightarrow V$.

□ $\ker T = U \cap V = U$.

to like

$$T^2 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(x+y) \\ \frac{1}{2}(x+y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}(x+y) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}(x+y) \\ \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}(x+y) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}(x+y) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (\frac{1}{4} + \frac{1}{4})(x+y) \\ (\frac{1}{4} + \frac{1}{4})(x+y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(x+y) \\ \frac{1}{2}(x+y) \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\therefore T = T^2 \quad \text{Jas}$$

(ד) הוכחת כי $\ker T \cap \text{im } T = \{0\}$ יוביל ל- ~~הוכחה~~

$Tu = v - e_1, u \in V$ $q, p \mid T v = 0$ $s.t. \quad v \in \ker T \cap \text{im } T$ $\Rightarrow$
 $q \nmid p, v = Tu = T^2 u = Tv = 0, T^2 = T - 1 \quad \text{A} \mid p$

$\dim(\text{im } T + \text{ker } T) = \underbrace{\dim \text{im } T + \dim \text{ker } T}_{\dim V} - \underbrace{\dim(\text{im } T \cap \text{ker } T)}_0 = \dim V$

$V = \ln T + \ln \sigma T$ $\hookrightarrow$ σT , $\ln T$ $\text{fio } V - 1$ $\text{ה'ל } \wedge$

$$\square \quad V = \text{im } T \oplus \ker T$$

2) אילו $\ker T \cap \text{Im } T = 0$ - ב. נ"מ

• $\ker T + \text{im } T = V$ - e $\ker T \cap \text{im } T = \{0\}$

$$w = v - Tv, \quad -1 \leq u = Tv \leq 1, \quad v \in V \quad (3.2)$$

: $w \in \ker T$ $\Rightarrow \rho(w) = u \in \text{im } T - 1$ $v = u + w$ $\Rightarrow$

$$T_w = T(v - T_v) = T_v - T^2_v = T_v - T_v = 0$$

□ $v = u + w \in \text{im } T + \ker T$ $\square$