

אלגברה לינארית א – תרגיל 5

יש להגיש את התרגיל **בתחילת** התרגול ביום ד' ה-22/1. ניתן גם להגיש לתא שלי (מספר 52) עד יום ד' ה-22/1 בשעה 18:00. בכל השאלות, אם לא נאמר אחרת, $\mathbb{F}$ הוא שדה וכל המרחבים הוקטוריים הם מעל $\mathbb{F}$.

שאלה 1

אילו מההעתקות הבאות הן העתקות לינאריות? הוכיחו את קביעתכם.

א. $T : \mathbb{F}[x] \rightarrow \mathbb{F}[x]$ המוגדרת על ידי $Tf = f(x^2)$.

ב. $T : M_{n \times n}(\mathbb{F}) \rightarrow M_{n \times n}(\mathbb{F})$ המוגדרת על ידי $T(A) = A^2$.

ג. תהי $B \in M_{n \times n}(\mathbb{F})$ מטריצה.

$T : M_{n \times n}(\mathbb{F}) \rightarrow M_{n \times n}(\mathbb{F})$ מוגדרת על ידי $T(A) = AB - BA$.

ד. $T : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ המוגדרת על ידי $Tz = \bar{z}$, כאשר חושבים על $\mathbb{C}$ כמרחב וקטורי מעל $\mathbb{C}$.

ה. $T : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ המוגדרת על ידי $Tz = \bar{z}$, כאשר חושבים על $\mathbb{C}$ כמרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$.

ו. תהי C קבוצת הפונקציות הגזירות $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. אז C מרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$ (אין צורך להוכיח זאת).

$T : C \rightarrow C$ מוגדרת על ידי $Tf = f'$.

שאלה 2

נגדיר $T : (\mathbb{Z}_5)^3 \rightarrow (\mathbb{Z}_5)^4$ על ידי

$$T \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{1} & \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{1} & \bar{1} & \bar{2} \\ \bar{2} & \bar{2} & \bar{4} \\ \bar{4} & \bar{3} & \bar{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

מצאו בסיסים ל- $\ker T$ ול- $\text{image } T$.

שאלה 3

נגדיר תתי מרחבים של $\mathbb{Q}^5$:

$$U = \text{span}\{(0, -1, 1, 1, 1), (-1, 0, 1, 0, 1), (1, -1, 2, 1, 2)\}$$

$$V = \text{span}\{(2, 1, 3, 0, 2), (2, 0, 2, 1, 1), (1, 1, 2, 0, 1)\}$$

א. מצאו בסיסים ל- U , ל- V , ול- $U + V$.

ב. מצאו את $\dim(U \cap V)$. (אין צורך למצוא בסיס ל- $U \cap V$).

ג. האם קיימת העתקה לינארית $T : \mathbb{Q}^5 \rightarrow \mathbb{Q}^5$ כך ש- $\ker T = U$ ו- $\text{image } T = V$? הוכיחו את קביעתכם.

שאלה 4

יהיו U ו- V מרחבים וקטוריים ותהייה $T, T' : U \rightarrow V$ העתקות לינאריות. תהי S קבוצה פורשת של U ונניח כי לכל $u \in S$ מתקיים $Tu = T'u$. הוכיחו כי $T = T'$ (כלומר, $Tu = T'u$ לכל $u \in U$).

שאלה 5

יהיו U ו- V מרחבים וקטוריים ותהי $T : U \rightarrow V$ העתקה לינארית כך ש- $\ker T = 0$.

א. תהי S קבוצה בת"ל ב- U . הוכיחו שהקבוצה $S' = \{Tu : u \in S\}$ בת"ל ב- V .

ב. יהי B בסיס ל- U . האם הקבוצה $B' = \{Tu : u \in B\}$ בסיס ל- V ? אם כן, הוכיחו. אם לא, תנו דוגמא נגדית.

שאלה 6

יהי V מרחב וקטורי ותהי $T : V \rightarrow V$ העתקה לינארית. נניח שקיים $n \in \mathbb{N}$ כך שלכל $v \in V$ מתקיים $T^n v = v$. הוכיחו כי $\ker T = 0$ ו- $\text{image } T = V$.

שאלה 7

נגדיר תתי מרחבים של $\mathbb{R}^n$ (אין צורך להוכיח שאלו תתי מרחבים):

$$U = \{(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n : \alpha_1 + \dots + \alpha_n = 0\}$$

$$V = \{(\underbrace{\alpha, \dots, \alpha}_n) : \alpha \in \mathbb{R}\}$$

הוכיחו כי $\mathbb{R}^n = U \oplus V$ ומצאו את $\dim U$ ו- $\dim V$.

שאלה 8

נניח כי $\text{char } \mathbb{F} \neq 2$ (כלומר $2 \neq 0$ ב- $\mathbb{F}$). נסמן ב- U את קבוצת המטריצות הסימטריות ב- $M_n(\mathbb{F})$ ונסמן ב- V את קבוצת המטריצות האנטי-סימטריות ב- $M_n(\mathbb{F})$. אז U ו- V הם תתי מרחבים של $M_n(\mathbb{F})$ (אין צורך להוכיח זאת).

א. מצאו את $\dim U$. הוכיחו את קביעתכם.

ב. מצאו את $\dim V$. הוכיחו את קביעתכם.

ג. נגדיר $T : M_n(\mathbb{F}) \rightarrow M_n(\mathbb{F})$ על ידי $T(A) = A + A^t$. הוכיחו כי $\ker T = V$ ו- $\text{image } T = U$.

ד. רשות: מה הן התשובות לסעיפים א' וב' כאשר $\text{char } \mathbb{F} = 2$? האם סעיף ג' נכון?

שאלה 9

יהי V מרחב וקטורי סוף מימדי ויהיו U ו- W תתי-מרחבים של V כך ש-

$$\dim U + \dim W = \dim V.$$

הוכיחו:

א. קיימת העתקה לינארית $T : V \rightarrow V$ כך ש- $\ker T = U$ ו- $\text{image } T = W$.

ב. קיימת העתקה לינארית $T : V \rightarrow V$ כך ש- $\ker T = U + W$ ו- $\text{image } T = U \cap W$ (רמז: משפט המימדיות).

שאלה 10

יהי V מרחב וקטורי. העתקה לינארית $T : V \rightarrow V$ נקראת אידמפוטנטית או הטלה אם $T^2 = T$ (כלומר, $TTv = Tv$ לכל $v \in V$).

א. הראו כי $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ המוגדרת על ידי $T \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(x+y) \\ \frac{1}{2}(x+y) \end{bmatrix}$ היא אידמפוטנטית.

ב. נניח ש- V סוף-מימדי. תהי $T : V \rightarrow V$ העתקה לינארית אידמפוטנטית. הוכיחו כי $\ker T \oplus \text{image } T = V$.

(רמז: מספיק להוכיח ש- $\ker T \cap \text{image } T = \{0\}$).

ג. *רשות: הוכיחו את סעיף ב' ללא ההנחה ש- V סוף-מימדי.