

1 ה"כ

שאלה

$$U_1 = \{f \in \mathbb{R}[x] : f(6) \geq 0\} \quad (10)$$

! ה"כ ה"כ ה"כ U_1

$$f(6) = 1 \geq 0 \Rightarrow U_1 \quad \text{ה"כ} \quad f(x) = 1 \quad \text{ה"כ} \quad \text{ה"כ}$$

$$\Rightarrow -1 \cdot f \notin U_1 \quad \text{ה"כ}$$

$$(-1 \cdot f)(6) = -1 \cdot f(6) = -1 < 0$$

$$U_2 = \{f \in \mathbb{R}[x] : f(1) + f(2) = f(3)\} \quad (20)$$

! $\mathbb{R}[x]$ ה"כ ה"כ ה"כ U_2

$$\alpha \in \mathbb{R} \quad \text{ה"כ} \quad f, g \in U_2 \quad \text{ה"כ}$$

$$g(1) + g(2) = g(3) \quad \text{ה"כ} \quad f(1) + f(2) = f(3) \quad \text{ה"כ}$$

$$\therefore f + g \in U_2 \quad \text{ה"כ}$$

$$(f+g)(1) + (f+g)(2) = f(1) + g(1) + f(2) + g(2)$$

$$= f(3) + g(3) = (f+g)(3)$$

$$\therefore f+g \in U_2 \quad \text{ה"כ}$$

$$\therefore \alpha f \in U_2 \quad \text{ה"כ}$$

$$\begin{aligned} (\alpha f)(1) + (\alpha f)(2) &= \alpha \cdot f(1) + \alpha \cdot f(2) = \alpha(f(1) + f(2)) = \alpha f(3) \\ &= (\alpha \cdot f)(3) \end{aligned}$$

$$\square. (0(1) + 0(2) = 0 = 0(3)) \quad 0 \in U_2 \quad \text{ה"כ} \quad \alpha f \in U_2 \quad \text{ה"כ} \quad U_2 \neq \emptyset \quad \text{ה"כ}$$

$$U_3 = \{f \in \mathbb{R}[x] \mid f(1-x) = f(x)\} \quad (2)$$

! $\mathbb{R}[x]$ $\bar{\in}$ מרחב וקטורי U_3

$\alpha \in \mathbb{R}$ ו- $f, g \in U_3$ ה' כנסת:

$f+g \in U_3$ כ' נ'

$$(f+g)(1-x) = f(1-x) + g(1-x) = f(x) + g(x) = (f+g)(x)$$

$\alpha f \in U_3$ כ' נ'

$$(\alpha f)(1-x) = \alpha \cdot f(1-x) = \alpha \cdot f(x) = (\alpha f)(x)$$

$\text{כ' נ' } 0 \in U_3$ $\text{מ' } U_3 \neq \emptyset$

$$\square \quad 0(1-x) = 0 = 0(x)$$

$$U_4 = \{f \in \mathbb{R}[x] \mid |f(2)| \geq |f(-2)|\} \quad (3)$$

! $\mathbb{R}[x]$ $\bar{\in}$ מרחב וקטורי U_4

$$|1(2)| = 1 \geq 1 = |1(-2)| \text{ כ' נ' } 1 \in U_4$$

$$|(-x)(2)| = 2 \geq 2 = |(-x)(-2)| \text{ כ' נ' } -x \in U_4$$

$$|(1-x)(2)| = 1 \not\geq 3 = |(1-x)(-2)| \text{ כ' נ' } 1-x \notin U_4$$

2.3

$$U = \{ M_{n \times n}(F) \mid \text{invertible} \} \quad (10)$$

$M_{n \times n}(F)$ is a vector space U

(invertible $n \times n$) $0_{n \times n} \in U$ is not in U (0 is not invertible)

Let $\alpha \in F$ and U is a vector space $A = (a_{ij}), B = (b_{ij})$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & b_{nn} \end{bmatrix}$$

is $A+B \in U$

$$A+B = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn}+b_{nn} \end{bmatrix} \in U$$

is $\alpha A \in U$

$$\alpha A = \alpha \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha a_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha a_{nn} \end{bmatrix} \in U$$

$$U = \{ M_{n \times n}(F) \mid \text{invertible} \} \quad (11)$$

$M_{n \times n}(F)$ is a vector space U

הוכחה:

① $U \neq \emptyset$ כי $0_{n \times n} \in U$ (זוהי 0 וזוהי 1)

'היו' $A, B \in U$ - $\alpha \in F$ נבחר. $A = (a_{ij})_{i,j}$ $B = (b_{ij})_{i,j}$

נבטא כי $A+B \in U$: האנדר (i,j) של $A+B$

$A+B$ $\hookrightarrow a_{ij} + b_{ij}$. אם $i > j$ אז $a_{ij} = b_{ij} = 0$

נשקול $a_{ij} + b_{ij} = 0$ אז $a_{ij} + b_{ij} = 0$ נכונה

נשקול $A+B \in U \Leftarrow$

נבטא כי $\alpha A \in U$: האנדר (i,j) של αA

αa_{ij} . אם $i > j$ אז $a_{ij} = 0$ אז $\alpha a_{ij} = 0$

נכונה $\alpha A \in U \Leftarrow$ נכונה $A \in U$

② $U = \{ A \in M_{n \times n}(F) \mid A^t = A \}$

$0_{n \times n} \in U$ כי $M_{n \times n}(F)$ של U נכונה

(נבטא כי 0 הוא האנדר הנכונה)

③ $U = \{ A \in M_{n \times n}(F) \mid A = A^t \}$

$U \subseteq M_{n \times n}(F)$

הוכחה: $U \neq \emptyset$ כי $0_{n \times n} \in U$. $0^t = 0$

$$\text{נס} \quad A^t = A, B^t = B \quad \text{כי} \quad A, B \in U \quad \text{נ"ל}$$

$$(A+B)^t = A^t + B^t = A+B$$

$$A+B \in U \quad \Leftarrow$$

$$\text{נס} \quad A^t = A \quad \text{כי} \quad \alpha \in F \quad \text{ו-} \quad A \in U \quad \text{נ"ל}$$

$$(\alpha A)^t = \alpha A^t = \alpha A$$

$$\square \quad \alpha A \in U \quad \Leftarrow$$

$$U = \{ A \in M_{n \times n}(F) \mid A = -A^t \} \quad (1)$$

$$! \quad M_{n \times n}(F) \quad \text{היא} \quad \text{חבורה} \quad \text{לפי} \quad U$$

$$-0^t = -0 = 0 \quad \text{כי} \quad 0 \in U \quad \text{נ"ל}$$

$$\text{נס} \quad -B^t = B \quad \text{ו-} \quad -A^t = A \quad \text{כי} \quad A, B \in U \quad \text{נ"ל}$$

$$-(A+B)^t = -(A^t + B^t) = -A^t - B^t = A+B$$

$$A+B \in U \quad \Leftarrow$$

$$\text{נס} \quad -A^t = A \quad \text{כי} \quad \alpha \in F \quad \text{ו-} \quad A \in U \quad \text{נ"ל}$$

$$-(\alpha A)^t = -(\alpha A^t) = \alpha \cdot (-A^t) = \alpha A$$

$$\square \quad \alpha A \in U \quad \Leftarrow$$

$$(n > 1) \quad U = \left\{ A \in M_{n \times n}(\mathbb{F}) \mid \text{rank } A = 1 \right\} \quad (1)$$

U איז אבסורדע פאמיליע פון $M_{n \times n}(\mathbb{F})$

$E_{11}, E_{22}, \dots, E_{nn}$ האבן רינגקאל $\text{rank } E_{ii} = 1$

ע"כ U איז נישט א פאמיליע ווייל $E_{ii} \in U$ און $E_{ii} E_{ii} = E_{ii}$ נישט 0

און $\text{rank } E_{ii} = 1$

$$\text{rank}(E_{11} + \dots + E_{nn}) = \text{rank } I_n = n > 1 \quad (n > 1)$$

און $E_{11} + \dots + E_{nn} \notin U$ און U איז נישט א פאמיליע!

$$U = \{ A \in M_{n \times n}(\mathbb{F}) \mid A^2 = 0 \} \quad (2)$$

אבסורדע

$$E_{ij} E_{kl} = \begin{cases} E_{il} & j=k \\ 0 & j \neq k \end{cases}$$

U איז א פאמיליע פון $M_{n \times n}(\mathbb{F})$

אבסורדע: $B = E_{21}, A = E_{12}$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{bmatrix}$$

און $B^2 = E_{21} E_{21} = 0$ און $A^2 = E_{12} E_{12} = 0$

און $A+B \notin U$ און $A, B \in U$

$$(A+B)^2 = (E_{12} + E_{21})(E_{12} + E_{21}) = E_{12}E_{12} + E_{12}E_{21} + E_{21}E_{12} + E_{21}E_{21} = 0 + E_{11} + E_{22} + 0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{bmatrix} \neq 0$$

3 הנ"ל

$$U = \text{Span}\{x^2 + \bar{1}, x + \bar{2}, x^3 + x + \bar{2}, x^3 + \bar{2}x^2 + \bar{2}\} \subseteq \mathbb{Z}_3[x]$$

$$U \subseteq (\mathbb{Z}_3)_3[x] \quad \text{כ"פ סגור}$$

$$\text{יש } (\mathbb{Z}_3)^4 \text{ של } (\mathbb{Z}_3)_3[x] \text{ נגזרת כל}$$

$$(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \longleftarrow \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3$$

יש נגזרת כל כ"פ סגור U יש צירוף הנגזרת של כל אלה

U נגזרת כל הנגזרת הנגזרת

$$\begin{array}{c} 1 \quad x \quad x^2 \quad x^3 \\ \left[\begin{array}{cccc} \bar{1} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{2} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{2} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{2} & \bar{0} & \bar{2} & \bar{1} \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{R_3 \leftarrow R_3 - R_2 \\ R_4 \leftarrow R_4 - R_2}} \left[\begin{array}{cccc} \bar{1} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{2} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{2} & \bar{2} & \bar{1} \end{array} \right] \xrightarrow{R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1} \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc} \bar{1} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{2} & \bar{2} & \bar{1} \end{array} \right] \xrightarrow{R_4 \leftarrow R_4 - 2R_2} \left[\begin{array}{cccc} \bar{1} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} \end{array} \right] \xrightarrow{R_4 \leftarrow R_4 - R_3}$$

$$\left[\begin{array}{cccc} \bar{1} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \end{array} \right]$$

$$\begin{array}{l} \text{לכן } U \text{ סגור} \\ \{ \bar{1} + x^2, x + x^2, x^3 \} \\ \dim U = 3 \end{array}$$

~~$$\begin{aligned}
 & \text{יש } \mathbb{R}^8 \text{ או } M_{2 \times 2}(\mathbb{C}) \text{ שבה} \\
 & (a, a', b, b', c, c', d, d') \mapsto \begin{bmatrix} a+bi & b+bi' \\ c+c'i & d+d'i' \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$~~

Ⓒ) אם S_a היא איזומורפיזם מן $\mathbb{R}$ ל- $\mathbb{C}$

S_a של $\mathbb{C}$ איזומורפיזם מן $\mathbb{C}$ ל- $\mathbb{C}$

הערה Ⓓ) (האין זה מאפשר רק $a=i$,

הן מסתמך אפוא על S_i שבה $\mathbb{R}$

יש $\mathbb{R}^8$ או $M_{2 \times 2}(\mathbb{C})$ שבה

$$(a, a', b, b', c, c', d, d') \mapsto \begin{bmatrix} a+bi & b+bi' \\ c+c'i & d+d'i' \end{bmatrix}$$

(צ"ח) אם המטריצה של S_i היא

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3 - R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

לכן מאפשר S_i שבה $\mathbb{R}$

$$\boxed{a \in \mathbb{C} \text{ ו- } \mathbb{R} \text{ שבה } S_a} \leftarrow$$

5.6

$$AB = I - A$$

Ⓢ

Ⓢ) נניח כי $I+B$ הפיכה. אז A הפיכה.

$$AB = I - A \Rightarrow AB + A = I$$

הנכחה:

$$\Rightarrow AB + AI = I$$

$$\Rightarrow A(B+I) = I$$

□. לפי A הפיכה. (התנאי $B+I$ הפיכה נ'נ'ר).

Ⓢ) נניח כי B סימטרית. הוכחנו כי A סימטרית.

$$(B+I)^t = B^t + I = B+I \Leftrightarrow B = B^t$$

הנכחה:

לכן $B+I$ סימטרית.

מהחילוק ששנינו $\textcircled{16}$ נובע כי $A^{-1} = (B+I)^{-1}$

$$A^t = ((B+I)^{-1})^t = \overset{\substack{\uparrow \\ \text{מחזוריות}}}{((B+I)^t)^{-1}} = (B+I)^{-1} = A$$

לכן, A סימטרית. $\square$

6 Sep

o'ile $f_1, \dots, f_n \in S$

$$d_1 = \dots = d_n = 0 \text{ s.t. } d_1 f_1 + \dots + d_n f_n = 0 \text{ p.c.e.} \quad \square 3$$
$$f_i = f_{a_i} \quad \text{wobei } a_i \in \mathbb{R} \quad \text{f\"ur } 1 \leq i \leq n \quad \square$$

$n-1$ ist 8/12 in $f_i(a_j) = 0$ ist

$$, 1 \leq i \leq n \text{ 且 } \alpha_1 f_1 + \dots + \alpha_n f_n = 0 \quad -1/17$$

$$\begin{aligned} 0 &= \mathcal{O}(a_i) = (\alpha_1 f_1 + \dots + \alpha_n f_n)(a_i) \\ &= \underbrace{\alpha_1 f_1(a_i)}_0 + \dots + \underbrace{\alpha_{i-1} f_{i-1}(a_i)}_0 + \underbrace{\alpha_i f_i(a_i)}_1 + \underbrace{\alpha_{i+1} f_{i+1}(a_i)}_0 + \dots + \underbrace{\alpha_n f_n(a_i)}_0 \\ &= \alpha_i \cdot 1 = \alpha_i \end{aligned}$$

אם $\alpha_i = 0$ עבור $1 \leq i \leq n$ אזי

□. 2) 7 3 2, $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$

C, $\rightarrow$ SC $\rightarrow$ e $\rightarrow$ 10 $\rightarrow$ 25/10, S-e $\rightarrow$ 3 (2)

$f(x) = 1$ "8 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ וִיכֵן היא נכונה

$$(C \neq \text{Span } S \mid \text{or} \mid) \quad f \notin \text{Span } S \Rightarrow \neg (C)$$

לפי הניסוח $f \in \text{Span } S$ -

יש קיימים $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ ו- $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ כך ש-

$$f = \alpha_1 f_{a_1} + \dots + \alpha_n f_{a_n}$$

היא ו- $\mathbb{R}$ תהיה אינסופית, $b \in \mathbb{R} \setminus \{a_1, \dots, a_n\}$ קיים

$$1 = f(b) = \alpha_1 \overset{=0}{f_{a_1}(b)} + \dots + \alpha_n \overset{=0}{f_{a_n}(b)} = 0 \quad \text{ש/}$$

לפי סתירה! אכן בהכרח $f \notin \text{Span } S$ $\square$

7.1 ke

$$P_S^E = \left[\begin{array}{c|c|c|c} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}_S & \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_S & \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}_S & \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}_S \end{array} \right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$P_E^E = \left[\begin{array}{c|c|c|c} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_E & \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_E & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}_E & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_E \end{array} \right]$$

↑ ↑ ↑ ↑
1/16 1/4 1/8 1/2

$$\left[\begin{array}{c|c} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{R_4 \leftarrow R_4 - R_2 \\ R_3 \leftarrow R_3 - R_2}} \left[\begin{array}{c|c} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{\text{f/11} \\ \sim 1/2}}$$

$$\left[\begin{array}{c|c} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{R_2 \leftarrow -R_2 \\ R_3 \leftarrow 3R_3 \\ R_4 \leftarrow 2R_4}} \left[\begin{array}{c|c} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{R_2 \leftarrow R_2 - 2R_4 \\ R_3 \leftarrow R_3 - 3R_4}}$$

$$\left[\begin{array}{c|c} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{R_1 \leftarrow R_1 + 2R_3 \\ R_2 \leftarrow R_2 + 3R_3}} \left[\begin{array}{c|c} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & 4 \\ 4 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \right] \xrightarrow{R_1 \leftarrow R_1 - R_2}$$

$$\left[\begin{array}{c|c} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & 4 \\ 4 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \right] \quad P_E^S = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & 4 \\ 4 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

مثلاً 231, P_D^S نحو 10٪ (2)

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{R_4 \leftarrow R_4 + R_3 \\ R_3 \leftarrow -R_3}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 3 & 2 & 3 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{R_4 \leftarrow 2R_4 \\ R_2 \leftarrow R_2 - R_3}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 2 & 6 & 4 & 6 \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{4} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} \end{array} \right] \begin{array}{l} R_1 \leftarrow R_1 - \bar{2}R_4 \\ R_2 \leftarrow R_2 - R_4 \\ R_3 \leftarrow R_3 + R_4 \end{array} \left[\begin{array}{cc|cc} \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} \end{array} \right] \left[\begin{array}{cc|cc} \bar{1} & \bar{3} & \bar{2} & \bar{4} \\ \bar{3} & \bar{4} & \bar{2} & \bar{2} \\ \bar{2} & \bar{2} & \bar{2} & \bar{3} \\ \bar{2} & \bar{1} & \bar{4} & \bar{1} \end{array} \right]$$

$$P_D^S = \begin{bmatrix} \bar{1} & \bar{3} & \bar{2} & \bar{4} \\ \bar{3} & \bar{4} & \bar{2} & \bar{2} \\ \bar{2} & \bar{2} & \bar{2} & \bar{3} \\ \bar{2} & \bar{1} & \bar{4} & \bar{1} \end{bmatrix}$$

$$P_D^E = P_D^S P_S^E = \begin{bmatrix} 1 & \bar{3} & \bar{2} & \bar{4} \\ \bar{3} & \bar{4} & \bar{2} & \bar{2} \\ \bar{2} & \bar{2} & \bar{2} & \bar{3} \\ \bar{2} & \bar{1} & \bar{4} & \bar{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{3} \\ 1 & \bar{1} & \bar{3} & \bar{0} \\ 1 & \bar{0} & \bar{1} & \bar{3} \\ 1 & \bar{1} & \bar{0} & \bar{1} \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$= \begin{bmatrix} \bar{4} & \bar{2} & \bar{1} & \bar{3} \\ \bar{3} & \bar{1} & \bar{4} & \bar{2} \\ \bar{2} & \bar{0} & \bar{3} & \bar{0} \\ \bar{1} & \bar{2} & \bar{2} & \bar{4} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ \bar{4} \end{bmatrix}_E = P_E^S \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \bar{2} \\ \bar{4} \end{bmatrix}_S = \begin{bmatrix} \bar{0} & \bar{3} & \bar{1} & \bar{2} \\ \bar{3} & \bar{2} & \bar{4} & \bar{4} \\ \bar{4} & \bar{2} & \bar{0} & \bar{3} \\ \bar{2} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{1} \\ \bar{1} \\ \bar{2} \\ \bar{4} \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$= \begin{bmatrix} \bar{3} \\ \bar{4} \\ \bar{3} \\ \bar{2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ \bar{4} \end{bmatrix} = \bar{3} \begin{bmatrix} \bar{0} \\ \bar{1} \\ \bar{1} \\ \bar{1} \end{bmatrix} + \bar{4} \begin{bmatrix} \bar{0} \\ \bar{1} \\ \bar{0} \\ \bar{1} \end{bmatrix} + \bar{3} \begin{bmatrix} \bar{0} \\ \bar{3} \\ \bar{1} \\ \bar{0} \end{bmatrix} + \bar{2} \begin{bmatrix} \bar{3} \\ \bar{0} \\ \bar{3} \\ \bar{1} \end{bmatrix}$$

8 ה"ב

$$U = \{f \in \mathbb{R}_2[x] : f(x) + f'(x) = f(x+1)\}$$

$\mathbb{R}_2[x]$ is a vector space and U is a subspace

where $0 \in U$ so $U \neq \emptyset$

$$0(x) + 0'(x) = 0 = 0(x+1)$$

So: $f, g \in U$ then
 $f, g \in U$

$$(f+g)(x) + (f+g)'(x) = f(x) + g(x) + f'(x) + g'(x) = f(x+1) + g(x+1) = (f+g)(x+1)$$

$f+g \in U$ so

So: $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ and $f \in U$ then

$$(\alpha f)(x) + (\alpha f)'(x) = \alpha \cdot f(x) + \alpha \cdot f'(x) = \alpha \cdot f(x+1) = (\alpha f)(x+1)$$

$\alpha f \in U$ so

$\mathbb{R}_2[x]$ is a vector space and U is a subspace

~~we don't need~~

$f(x) = a + bx + cx^2$ is a polynomial, U is a subspace, so U is a vector space

$$f(x) + f'(x) = f(x+1)$$

$\Downarrow$

$$a + bx + cx^2 + b + 2cx = a + b(x+1) + c(x^2 + 2x + 1)$$

$\Downarrow$

$$(a+b) + (b+2c)x + cx^2 = (a+b+c) + (b+2c)x + cx^2$$

$$\begin{array}{c} \updownarrow \\ \mathbb{Q} = \mathbb{C} \end{array}$$

$$U = \{ a + bx \mid a, b \in \mathbb{R} \} \quad \text{pf}$$

$$U \text{ is a subspace of } \mathbb{C} \text{ w.r.t. } \{1, x\} \quad \text{is a basis}$$

$$((u \rightarrow \text{basis} \rightarrow) a + bx = a \cdot 1 + b \cdot x \rightarrow \{1, x\} \subseteq U \rightarrow)$$

$$\boxed{\dim U = 2 \rightarrow U \text{ is spanned by } \{1, x\}} \quad \text{pf}$$

עבודה 9

(10) $\mathbb{F}_{n-1}[x]$ - $\{f_1, \dots, f_n\}$ בסדר $n-1$

הוא $\dim \mathbb{F}_{n-1}[x] = n-1$ (כל $\{1, x, \dots, x^{n-1}\}$ בסדר n ליניארי)

1. $\{f_1, \dots, f_n\}$ קבוצה עם n איברים, נשקף

אחידות $\{f_1, \dots, f_n\}$ פולינום $\mathbb{F}_{n-1}[x]$

'ה' $g \in \mathbb{F}_{n-1}[x]$ (כאן $\beta_i = g(\alpha_i)$ לכל $i=1, \dots, n$)

אזרחי (ראה כי $g = \beta_1 f_1 + \dots + \beta_n f_n$ קודם נוכח:

דוגמה 1: $h \in \mathbb{F}_{n-1}[x]$ נקיים $h(\alpha_1) = \dots = h(\alpha_n) = 0$, אז $h=0$

הוכחה: h פולינום n שונים $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ אם $h(\alpha_i) = 0$ לכל $i=1, \dots, n$

~~אם $h \neq 0$ אז $\deg h < n$ ולכן h אינו יכול להיות 0 ב- n נקודות שונות.~~

~~אם $h \neq 0$ אז $\deg h < n$ ולכן h אינו יכול להיות 0 ב- n נקודות שונות.~~

הוא (1) $h \in \mathbb{F}_{n-1}[x]$, $\deg h < n$ ולכן $h=0$ בהכרח

דוגמה 2:

(השורה אחת): $\beta_i = g(\alpha_i)$ לכל $i=1, \dots, n$ נקיים

$$(g - \beta_1 f_1 - \dots - \beta_n f_n)(\alpha_i) = g(\alpha_i) - \beta_1 f_1(\alpha_i) - \dots - \beta_n f_n(\alpha_i)$$

$$= \beta_i - \beta_1 \cdot 0 - \dots - \beta_{i-1} \cdot 0 - \beta_i \cdot 1 - \beta_{i+1} \cdot 0 - \dots - \beta_n \cdot 0$$

$$= \beta_i - \beta_i = 0$$

כלומר, $g - \beta_1 f_1 - \dots - \beta_n f_n = 0$, אז $g = \beta_1 f_1 + \dots + \beta_n f_n \in \text{Span}\{f_1, \dots, f_n\}$

כלומר, $g = \beta_1 f_1 + \dots + \beta_n f_n \in \text{Span}\{f_1, \dots, f_n\}$

(ב) הפולינום

$$f_i(x) = (\alpha_i - \alpha_1)^{-1} \cdots (\alpha_i - \alpha_{i-1})^{-1} (\alpha_i - \alpha_{i+1})^{-1} \cdots (\alpha_i - \alpha_n)^{-1} \cdot (x - \alpha_1) \cdots (x - \alpha_{i-1}) (x - \alpha_{i+1}) \cdots (x - \alpha_n)$$

נק"פ $f_i(\alpha_i) = 1$ - $f_i(\alpha_j) = 0$ $j \neq i$ ול

למה

$\text{Col } A = \{Av \mid v \in \mathbb{F}^n\}$ $A \in M_{n \times n}(\mathbb{F})$ הוכחה

(א) הוכחה: נוכיח באינדוקציה על m

$\text{Col } A^k = \text{Col } A^{k+1}$ $m=1$: נניח $(m \geq 1)$

נניח שהוכחנו עבור $m-1$ ונוכיח עבור m :

אם $\text{Col } A^{k+m} = \text{Col } A^k A^m \subseteq \text{Col } A^k$, 3 נניח $\text{Col } A^{k+m} \supseteq \text{Col } A^k$

יהי $v \in \text{Col } A^k$. אם הוכחנו $\text{Col } A^k = \text{Col } A^{k+m-1}$, האילווקציה $v = A^{k+m-1} u$ $u \in \mathbb{F}^n$ כך ש-

~~$v = A^{m-2} A^{k+1} u$ $(m \geq 2)$ $u \in \mathbb{F}^n$ כך ש- $v = A^{k+1} u \in \text{Col } A^{k+1} = \text{Col } A^k$ A^k~~

אכן, $v = A^{m-1} A^k u$ $u \in \mathbb{F}^n$ $v \in \text{Col } A^k = \text{Col } A^{k+m}$

אכן קיים $w \in \mathbb{F}^n$ כך ש- $A^k u = A^{k+1} w$ כלומר

$v = A^{m-1} A^k u = A^{m-1} A^{k+1} w = A^{m+k} w$

ולכן $v \in \text{Col } A^{m+k}$ $\square$

$$(Col A^0)$$

12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 100, 101, 102, 103, 104, 105, 106, 107, 108, 109, 110, 111, 112, 113, 114, 115, 116, 117, 118, 119, 120, 121, 122, 123, 124, 125, 126, 127, 128, 129, 130, 131, 132, 133, 134, 135, 136, 137, 138, 139, 140, 141, 142, 143, 144, 145, 146, 147, 148, 149, 150, 151, 152, 153, 154, 155, 156, 157, 158, 159, 160, 161, 162, 163, 164, 165, 166, 167, 168, 169, 170, 171, 172, 173, 174, 175, 176, 177, 178, 179, 180, 181, 182, 183, 184, 185, 186, 187, 188, 189, 190, 191, 192, 193, 194, 195, 196, 197, 198, 199, 200, 201, 202, 203, 204, 205, 206, 207, 208, 209, 210, 211, 212, 213, 214, 215, 216, 217, 218, 219, 220, 221, 222, 223, 224, 225, 226, 227, 228, 229, 230, 231, 232, 233, 234, 235, 236, 237, 238, 239, 240, 241, 242, 243, 244, 245, 246, 247, 248, 249, 250, 251, 252, 253, 254, 255, 256, 257, 258, 259, 260, 261, 262, 263, 264, 265, 266, 267, 268, 269, 270, 271, 272, 273, 274, 275, 276, 277, 278, 279, 280, 281, 282, 283, 284, 285, 286, 287, 288, 289, 290, 291, 292, 293, 294, 295, 296, 297, 298, 299, 300, 301, 302, 303, 304, 305, 306, 307, 308, 309, 310, 311, 312, 313, 314, 315, 316, 317, 318, 319, 320, 321, 322, 323, 324, 325, 326, 327, 328, 329, 330, 331, 332, 333, 334, 335, 336, 337, 338, 339, 340, 341, 342, 343, 344, 345, 346, 347, 348, 349, 350, 351, 352, 353, 354, 355, 356, 357, 358, 359, 360, 361, 362, 363, 364, 365, 366, 367, 368, 369, 370, 371, 372, 373, 374, 375, 376, 377, 378, 379, 380, 381, 382, 383, 384, 385, 386, 387, 388, 389, 390, 391, 392, 393, 394, 395, 396, 397, 398, 399, 400, 401, 402, 403, 404, 405, 406, 407, 408, 409, 410, 411, 412, 413, 414, 415, 416, 417, 418, 419, 420, 421, 422, 423, 424, 425, 426, 427, 428, 429, 430, 431, 432, 433, 434, 435, 436, 437, 438, 439, 440, 441, 442, 443, 444, 445, 446, 447, 448, 449, 450, 451, 452, 453, 454, 455, 456, 457, 458, 459, 460, 461, 462, 463, 464, 465, 466, 467, 468, 469, 470, 471, 472, 473, 474, 475, 476, 477, 478, 479, 480, 481, 482, 483, 484, 485, 486, 487, 488, 489, 490, 491, 492, 493, 494, 495, 496, 497, 498, 499, 500, 501, 502, 503, 504, 505, 506, 507, 508, 509, 510, 511, 512, 513, 514, 515, 516, 517, 518, 519, 520, 521, 522, 523, 524, 525, 526, 527, 528, 529, 530, 531, 532, 533, 534, 535, 536, 537, 538, 539, 540, 541, 542, 543, 544, 545, 546, 547, 548, 549, 550, 551, 552, 553, 554, 555, 556, 557, 558, 559, 560, 561, 562, 563, 564, 565, 566, 567, 568, 569, 570, 571, 572, 573, 574, 575, 576, 577, 578, 579, 580, 581, 582, 583, 584, 585, 586, 587, 588, 589, 590, 591, 592, 593, 594, 595, 596, 597, 598, 599, 600, 601, 602, 603, 604, 605, 606, 607, 608, 609, 610, 611, 612, 613, 614, 615, 616, 617, 618, 619, 620, 621, 622, 623, 624, 625, 626, 627, 628, 629, 630, 631, 632, 633, 634, 635, 636, 637, 638, 639, 640, 641, 642, 643, 644, 645, 646, 647, 648, 649, 650, 651, 652, 653, 654, 655, 656, 657, 658, 659, 660, 661, 662, 663, 664, 665, 666, 667, 668, 669, 670, 671, 672, 673, 674, 675, 676, 677, 678, 679, 680, 681, 682, 683, 684, 685, 686, 687, 688, 689, 690, 691, 692, 693, 694, 695, 696, 697, 698, 699, 700, 701, 702, 703, 704, 705, 706, 707, 708, 709, 710, 711, 712, 713, 714, 715, 716, 717, 718, 719, 720, 721, 722, 723, 724, 725, 726, 727, 728, 729, 730, 731, 732, 733, 734, 735, 736, 737, 738, 739, 740, 741, 742, 743, 744, 745, 746, 747, 748, 749, 750, 751, 752, 753, 754, 755, 756, 757, 758, 759, 760, 761, 762, 763, 764, 765, 766, 767, 768, 769, 770, 771, 772, 773, 774, 775, 776, 777, 778, 779, 780, 781, 782, 783, 784, 785, 786, 787, 788, 789, 790, 791, 792, 793, 794, 795, 796, 797, 798, 799, 800, 801, 802, 803, 804, 805, 806, 807, 808, 809, 810, 811, 812, 813, 814, 815, 816, 817, 818, 819, 820, 821, 822, 823, 824, 825, 826, 827, 828, 829, 830, 831, 832, 833, 834, 835, 836, 837, 838, 839, 840, 841, 842, 843, 844, 845, 846, 847, 84

$$\mathbb{F}^n \supseteq \text{Col } A \supseteq \text{Col } A^2 \supseteq \text{Col } A^3 \supseteq \dots$$

שיעור $k=0, \dots, n$ $\text{Col } A^k \neq \text{Col } A^{k+1}$ - כל הדרגות הן שונות

$$\mathbb{F}^n = \text{Col}(A^0) \supsetneq \text{Col } A^1 \supsetneq \dots \supsetneq \text{Col } A^{n-1} \supsetneq \text{Col } A^n \supsetneq \text{Col } A^{n+1}$$

$$n = \dim \mathbb{F}^n \geq \dim \text{Col } A^1 \geq \dots \geq \dim \text{Col } A^n \geq \dim \text{Col } A^{n+1} \geq 0$$

שאלות
 ד"ר אריאל שני $n+1$ מספרים $\sqrt[n]{n!}$ קטנים $n - n$ וזכור n
 שאלות $n - 1$ וזה n אם אין בהכרח

D. $\text{Gal } A^k = \text{Gal } A^{k+1}$ - e $\forall k \in \{0, \dots, n\}$ p.p.

$A^{k+m} = 0$ ש"כ $A^k = 0$ - ו $\exists k \in \mathbb{N}$ כ"כ $\exists m \in \mathbb{N}$ כ"כ $\exists$ (ז)

$$\text{Col } A^{k'} = \text{Col } A^{k'+1} \quad - \text{e } \gamma \quad k' \in \{0, \dots, n\} \text{ } \rho'' \text{ } \textcircled{P} \quad \text{'os}$$

$$\text{Col } A^{k+1} = \text{Col } A^{k+k+1} = \text{Col } 0 = \{\vec{0}\}$$

ה'לך מתיחב הסמוכות של $A^{k'}$ הוא מתיחב 0 , $A^{k'} = 0$

□ $A^n = \underset{k' < n}{\uparrow} A^{k'} A^{n-k'} = 0 \cdot A^{n-k'} = 0$, also