

אלגברה לינארית א – תרגיל 4

יש להגיש את התרגיל **בתחילת** התרגול ביום ד' ה-8/1. ניתן גם להגיש לתא שלי (מספר 52) עד יום ד' ה-8/1 בשעה 18:00. בכל השאלות, אם לא נאמר אחרת, $\mathbb{F}$ הוא שדה.

שאלה 1

זכרו כי קבוצת הפולינומים $\mathbb{R}[x]$ היא מרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$. אילו מבין הקבוצות הבאות היא תת-מרחב של $\mathbb{R}[x]$? הוכיחו את קביעתכם.

א. $U_1 = \{f \in \mathbb{R}[x] : f(6) \geq 0\}$

ב. $U_2 = \{f \in \mathbb{R}[x] : f(1) + f(2) = f(3)\}$

ג. $U_3 = \{f \in \mathbb{R}[x] : f(1-x) = f(x)\}$

ד. $U_4 = \{f \in \mathbb{R}[x] : |f(2)| \geq |f(-2)|\}$

שאלה 2

זכרו כי המטריצות הריבועיות $M_{n \times n}(\mathbb{F})$ הן מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$. אילו מבין הקבוצות הבאות היא תת-מרחב של $M_{n \times n}(\mathbb{F})$? הוכיחו את קביעתכם.

א. קבוצת המטריצות האלכסוניות ב- $M_{n \times n}(\mathbb{F})$.
(מטריצה $A = (a_{ij})$ נקראת אלכסונית אם $a_{ij} = 0$ לכל $i \neq j$.)

ב. קבוצת המטריצות המשולשיות העליונות ב- $M_{n \times n}(\mathbb{F})$.
(מטריצה $A = (a_{ij})$ נקראת משולשית עליונה אם $a_{ij} = 0$ לכל $i > j$.)

ג. קבוצת המטריצות ההפיכות ב- $M_{n \times n}(\mathbb{F})$.

ד. קבוצת המטריצות הסימטריות ב- $M_{n \times n}(\mathbb{F})$.
(מטריצה A נקראת סימטרית אם $A = A^t$.)

ה. קבוצת המטריצות האנטי-סימטריות ב- $M_{n \times n}(\mathbb{F})$.
(מטריצה A נקראת אנטי-סימטרית אם $A = -A^t$.)

ו. קבוצת המטריצות A ב- $M_{n \times n}(\mathbb{F})$ המקיימות $\text{rank } A \leq 1$. (הניחו כי $n > 1$.)

ז. קבוצת המטריצות A ב- $M_{n \times n}(\mathbb{F})$ המקיימות $A^2 = 0$. (הניחו כי $n > 1$.)

שאלה 3

יהי U תת-המרחב של $\mathbb{Z}_3[x]$ הנפרש על ידי

$$S = \{x^2 + \bar{1}, x + \bar{2}, x^3 + x + \bar{2}, x^3 + \bar{2}x^2 + \bar{2}\}$$

מצאו בסיס ל- U וחשבו את $\dim U$.

שאלה 4

נחשוב על $M_{2 \times 2}(\mathbb{C})$ כמרחב וקטורי מעל $\mathbb{C}$. יהי $a \in \mathbb{C}$ ותהי

$$S_a = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} i & 0 \\ 1 & a \end{bmatrix} \right\}$$

א. מצאו את כל הערכים של a עבורם S בת"ל מעל $\mathbb{C}$.

ב. עבור כל אחד מהערכים של a עבורם S_a אינה בת"ל מעל $\mathbb{C}$, מצאו בסיס ל- $\text{Span } S_a$.

ג. האם קיים $a \in \mathbb{C}$ כך ש- S_a תלויה לינארית מעל $\mathbb{R}$ (כלומר, כאשר חושבים על $M_{2 \times 2}(\mathbb{C})$ כמרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$)? הוכיחו את קביעתכם.

שאלה 5

תהינה $A, B \in M_{n \times n}(\mathbb{F})$ מטריצות כך שמתקיים $AB = I - A$.

א. נניח ש- $I + B$ הפיכה. הוכיחו כי A הפיכה.

ב. בהמשך לסעיף א, נניח גם כי B סימטרית. הוכיחו כי A סימטרית.

שאלה 6

תהי C קבוצת כל הפונקציות מ- $\mathbb{R}$ ל- $\mathbb{R}$ (לאו דווקא רציפות). זכרו כי C הוא מרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$. לכל $a \in \mathbb{R}$, נגדיר פונקציה $f_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ על ידי

$$f_a(x) = \begin{cases} 1 & x = a \\ 0 & x \neq a \end{cases}$$

תהי $S = \{f_a \mid a \in \mathbb{R}\}$.

א. הוכיחו כי S תת-קבוצה בת"ל של C .

ב. הראו כי S אינה פורשת את C .

שאלה 7

נתונים הבסיסים הסדורים הבאים ל- $(\mathbb{Z}_5)^4$ (אין צורך להראות כי מדובר בבסיסים):

$$S = \{(\bar{1}, \bar{0}, \bar{0}, \bar{0}), (\bar{0}, \bar{1}, \bar{0}, \bar{0}), (\bar{0}, \bar{0}, \bar{1}, \bar{0}), (\bar{0}, \bar{0}, \bar{0}, \bar{1})\}$$

$$E = \{(\bar{0}, \bar{1}, \bar{1}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{1}, \bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{3}, \bar{1}, \bar{0}), (\bar{3}, \bar{0}, \bar{3}, \bar{1})\}$$

$$D = \{(\bar{2}, \bar{2}, \bar{2}, \bar{1}), (\bar{2}, \bar{2}, \bar{1}, \bar{0}), (\bar{2}, \bar{1}, \bar{0}, \bar{0}), (\bar{2}, \bar{0}, \bar{0}, \bar{2})\}$$

(הבסיס S הוא הבסיס הסטנדרטי).

א. מצאו את מטריצת המעבר מ- S ל- E ואת מטריצת המעבר מ- E ל- S .

ב. מצאו את מטריצת המעבר מ- S ל- D ואת מטריצת המעבר מ- D ל- S .

ג. היעזרו בתשובותיכם לסעיפים א' וב' כדי למצוא את מטריצת המעבר מ- D ל- E .

ד. השתמשו בסעיף א' כדי להביע את הוקטור $(\bar{1}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{4})$ כצירוף לינארי של אברי הבסיס E . (לא ינתנו נקודות על פיתרון בעזרת מערכת משוואות!)

שאלה 8

זכרו כי $\mathbb{R}_n[x] = \{f \in \mathbb{R}[x] : \deg f \leq n\}$ הוא מרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$. נגדיר

$$U = \{f \in \mathbb{R}_2[x] : f(x) + f'(x) = f(x+1)\}$$

הוכיחו כי U תת-מרחב של $\mathbb{R}_2[x]$, מצאו ל- U בסיס, וחשבו את $\dim U$.

שאלה 9

יהיו $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{F}$ איברים שונים. נניח שיש פולינומים $f_1, \dots, f_n \in \mathbb{F}_{n-1}[x]$ כך ש-

$$f_i(\alpha_j) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

לכל $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$.

א. הוכיחו כי $\{f_1, \dots, f_n\}$ בסיס ל- $\mathbb{F}_{n-1}[x]$.

רמז: הראו כי אם $g \in \mathbb{F}_{n-1}[x]$ מקיים $g(\alpha_1) = \dots = g(\alpha_n) = 0$ אז $g = 0$. השתמשו בתרגיל 7, שאלה 7.

ב. *רשות: הראו כי קיימים פולינומים $f_1, \dots, f_n$ כמו בשאלה.

שאלה 10

תהי $A \in M_{n \times n}(\mathbb{F})$.

א. נניח שקיים k כך ש- $\text{Col } A^k = \text{Col } A^{k+1}$. הוכיחו כי $\text{Col } A^k = \text{Col } A^{k+m}$ לכל m טבעי. (המלצה: אינדוקציה.)

ב. הוכיחו שקיים $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ כך ש- $\text{Col } A^k = \text{Col } A^{k+1}$. רמז: הסתכלו על $\dim \text{Col } A^k$.

ג. הוכיחו שאם קיים $k \in \mathbb{N}$ כך ש- $A^k = 0$, אז $A^n = 0$. רמז: $B = 0$ אם ורק אם $\text{Col } B = 0$.