

אלגברה לינארית א – תרגיל 3

יש להגיש את התרגיל **בתחילת** התרגול ביום ד' ה-25/12.
ניתן גם להגיש לתא שלי (מספר 52) עד יום ד' ה-25/12 בשעה 18:00.

שאלה 1

נתונות המטריצות הבאות מעל $\mathbb{R}$:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -2 & b \\ -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

כאשר " ab " הן שתי הספרות האחרונות של תעודת הזהות שלכם. חשבו את הביטויים הבאים, או הסבירו מדוע הם אינם מוגדרים.

א. AC

ב. $B^t C$

ג. $AB + BA$

ד. $A(C + C^t)B$

ה. C^{-1}

שאלה 2

נתונות המטריצות הבאות מעל $\mathbb{Z}_5$:

$$A = \begin{bmatrix} \overline{1} & \overline{4} & \overline{a} \\ \overline{2} & \overline{4} & \overline{1} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \overline{2} & \overline{2} \\ \overline{3} & \overline{0} \\ \overline{b} & \overline{1} \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} \overline{1} & \overline{2} & \overline{3} \\ \overline{3} & \overline{1} & \overline{0} \\ \overline{4} & \overline{1} & \overline{4} \end{bmatrix}$$

כאשר " ab " הן שתי הספרות האחרונות של תעודת הזהות שלכם. חשבו את הביטויים הבאים, או הסבירו מדוע הם אינם מוגדרים.

א. AA^t

ב. $A^t B^t AC$

ג. $ACB + B^t B$

ד. C^{-1}

ה. $C^{-1}C^5$

שאלה 3

תהיינה $A \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$, $B \in M_{m \times m}(\mathbb{F})$ ו- $C \in M_{n \times n}(\mathbb{F})$. הוכיחו:

א. $\text{Col } AC \subseteq \text{Col } A$

ב. אם $\text{rank } C = n$, אז $\text{Col } AC = \text{Col } A$

ג. $\text{Row } BA \subseteq \text{Row } A$

ד. אם $\text{rank } B = m$, אז $\text{Row } BA = \text{Row } A$

ה. $\text{Null } A \subseteq \text{Null } BA$

ו. אם $\text{rank } B = m$, אז $\text{Null } A = \text{Null } BA$

ז. תנו דוגמא עם $\text{Null } A \not\subseteq \text{Null } AC$

(רמז: $\text{Row } A = \{uA \mid u \in M_{1 \times m}(\mathbb{F})\}$ ו- $\text{Col } A = \{Av \mid v \in M_{n \times 1}(\mathbb{F})\}$)

שאלה 4

יהי $\mathbb{F}$ שדה ותהיינה $A, B \in M_{n \times n}(\mathbb{F})$ מטריצות מתחלפות (כלומר $AB = BA$).

א. הוכיחו כי A ו- B^k מתחלפות לכל $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. (המלצה: אינדוקציה על k .)

ב. הוכיחו כי לכל $k, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ המטריצות A^k ו- B^m מתחלפות.

ג. נניח כי A הפיכה. הוכיחו כי A^{-1} ו- B מתחלפות.

ד. הוכיחו כי A^t ו- B^t מתחלפות.

שאלה 5

תהיינה $A, B, C \in M_{n \times n}(\mathbb{F})$. הוכיחו או הפריכו:

א. אם A ו- B מתחלפות ואם C ו- A מתחלפות אז C ו- B מתחלפות.

ב. אם A ו- B מתחלפות ואם A ו- C מתחלפות, אז A ו- $B + C$ מתחלפות.

ג. אם A ו- B מתחלפות ואם A ו- C מתחלפות, אז A ו- BC מתחלפות.

שאלה 6

יהיו $a, b, c \in \mathbb{F}$ הראו כי המטריצה

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

הפיכה והביעו את A^{-1} בעזרת a, b, c .

שאלה 7

תהי $A \in M_{n \times n}(\mathbb{F})$ מטריצה הפיכה ויהיו $v_1, \dots, v_t \in M_{n \times 1}(\mathbb{F})$ וקטורי עמודה. הוכיחו כי $v_1, \dots, v_t$ בת"ל אם ורק אם $Av_1, \dots, Av_t$ בת"ל.

שאלה 8

כתבו את המטריצה הממשית $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ כמכפלה של מטריצות אלמנטריות. (רמז: הביאו את A לצורה פדורגט מצומצמת).

שאלה 9

תהי $A \in M_{n \times n}(\mathbb{F})$. הוכיחו כי $\text{Null } A = \text{Null } A^2$ אם ורק אם $\text{Col } A = \text{Col } A^2$. (רמז: התבוננו בדרגה של המטריצות. היעזרו בשאלה 3).

שאלה 10

מטריצה $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n \in M_{n \times n}(\mathbb{F})$ נקראת משולשית עליונה אם $a_{ij} = 0$ לכל $i > j$ או במילים אחרות:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{bmatrix}$$

נסמן ב- $U_n(\mathbb{F})$ את קבוצת המטריצות המשולשיות עליונות מגודל $n \times n$.

א. הוכיחו כי אם $A, B \in U_n(\mathbb{F})$ אז $A + B \in U_n(\mathbb{F})$.

ב. הוכיחו כי אם $A, B \in U_n(\mathbb{F})$ אז $AB \in U_n(\mathbb{F})$.

ג. תהי $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n \in U_n(\mathbb{F})$. הוכיחו כי הפיכה אם ורק אם האיברים על האלכסון שלה $a_{11}, \dots, a_{nn}$ שונים מ-0. הוכיחו כי במקרה זה $A^{-1} \in U_n(\mathbb{F})$. (רמז: אילו פעולות שורה יביאו את A לצורה פדורגט מצומצמת?)

ד. נניח כי $n > 1$. האם הקבוצה $U_n(\mathbb{F})$ עם חיבור וכפל מטריצות היא שדה? מדוע?

שאלות רשות לתרגול נוסף

שאלה 11

תהי $A \in M_{n \times m}(\mathbb{F})$. הוכיחו:

א. $\text{rank } A = n$ אם ורק אם קיימת $B \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$ כך ש- $AB = I_n$.

א. $\text{rank } A = m$ אם ורק אם קיימת $B \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$ כך ש- $BA = I_m$.

שאלה 12

תהי $A \in M_{n \times n}(\mathbb{F})$.

א. נניח כי $I - A$ הפיכה. הוכיחו כי

$$I + A + A^2 + \dots + A^{k-1} = (I - A)^{-1}(I - A^k)$$

ב. נניח שקיים $k \in \mathbb{N}$ כך ש- $A^k = 0$. הוכיחו כי $I - A$ הפיכה.

שאלה 13

יהיו $a, b, c \in \mathbb{F}$ ותהי

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{bmatrix}$$

הוכיחו כי A הפיכה אם ורק אם $a \neq b, a \neq c, b \neq c$, והביעו את A^{-1} בעזרת a, b, c .

שאלה 14

תהי $A = (a_{ij}) \in M_{n \times n}(\mathbb{F})$ ותהי $B = (b_{ij}) \in M_{m \times m}(\mathbb{F})$. נגדיר מטריצה $C = (c_{ij}) \in M_{(n+m) \times (n+m)}(\mathbb{F})$ על ידי

$$c_{ij} = \begin{cases} a_{ij} & i \leq n, j \leq n \\ b_{(i-n)(j-n)} & i > n, j > n \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

ונסמן את C ב- $A \oplus B$. במילים אחרות:

$$A \oplus B = \begin{bmatrix} A & 0_{n \times m} \\ 0_{m \times n} & B \end{bmatrix}$$

נניח כי $A, A' \in M_{n \times n}(\mathbb{F})$ ו- $B, B' \in M_{m \times m}(\mathbb{F})$.

א. חשבו את $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$ כאשר $\mathbb{F} = \mathbb{R}$.

ב. הראו כי $(A \oplus B) + (A' \oplus B') = (A + A') \oplus (B + B')$.

ג. הראו כי $(A \oplus B)(A' \oplus B') = (AA') \oplus (BB')$.

ד. הראו כי אם A ו- B הפיכות, אז $A \oplus B$ הפיכה ו- $(A \oplus B)^{-1} = A^{-1} \oplus B^{-1}$.

ה. נניח כי $\mathbb{F} = \mathbb{R}$. היעזרו בסעיפים הקודמים כדי לחשב במהירות את $X^2 + X^{-1}$ עבור

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$