

90

A

10/10

(a=b=9)

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 9 & 9 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 4 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 6 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

$R_1 \leftrightarrow R_4$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 & 1 & 7 \\ 3 & 0 & 1 & 4 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 9 & 9 & 2 \end{bmatrix}$$

$R_2 \leftarrow R_2 - 3R_1$

$R_4 \leftarrow R_4 - 2R_1$

(10)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 7 & 10 \end{bmatrix}$$

$R_3 \leftrightarrow R_4$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 7 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$R_3 \leftarrow R_3 - 8R_1$

$R_2 \leftarrow 5R_2$

$(5 \cdot 0 = 0 \cdot 5 = 1)$

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\} 3$$

rank A = 3

A

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 9 & 9 & 9 & -2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

~~$R_2 \leftrightarrow R_1$~~

~~$R_3 \leftrightarrow R_1$~~

$R_1 \leftrightarrow R_5$

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ 9 & 9 & 9 & -2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 9 \end{bmatrix}$$

$R_2 \leftarrow R_2 + 9R_1$

$R_3 \leftarrow R_3 + 4R_1$

$R_4 \leftarrow R_4 + 5R_1$

$R_5 \leftarrow R_5 + R_1$

(2)

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -11 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & -2 & -4 & -6 \\ 0 & 1 & 2 & 8 \end{bmatrix}$$

$R_2 \leftrightarrow R_5$

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & -2 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -11 \end{bmatrix}$$

$R_3 \leftarrow R_3 + R_2$

$R_4 \leftarrow R_4 + 2R_2$

$$\left[\begin{array}{cccc} -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & -11 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{R_4 \leftarrow R_4 - 5R_3 \\ R_5 \leftarrow R_5 + \frac{11}{2}R_3}} \left[\begin{array}{cccc} -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \left. \vphantom{\begin{array}{c} R_4 \leftarrow R_4 - 5R_3 \\ R_5 \leftarrow R_5 + \frac{11}{2}R_3 \end{array}} \right\} 3$$

$$\boxed{\text{rank } A = 3}$$

2 נ"ל

$$S = \{(\bar{1}, \bar{1}, \bar{1}, \bar{0}), (\bar{1}, \bar{2}, \bar{0}, \bar{2}), (\bar{1}, \bar{1}, \bar{1}, \bar{2}), (\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{2})\} \quad (a=b=1)$$

$$\left[\begin{array}{cccc} \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{1} & \bar{2} & \bar{0} & \bar{2} \\ \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} & \bar{2} \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{R_2 \leftarrow R_2 - R_1 \\ R_3 \leftarrow R_3 - R_1}} \left[\begin{array}{cccc} \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} & \bar{2} \end{array} \right] \xrightarrow{R_4 \leftarrow R_4 - R_3} \left[\begin{array}{cccc} \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \end{array} \right] \quad (f)$$

$$B = \{(\bar{1}, \bar{1}, \bar{1}, \bar{0}), (\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{2}), (\bar{0}, \bar{0}, \bar{0}, \bar{2})\} \quad \text{הקטן}$$

Span S - פ"ם

$$\left[\begin{array}{cccc|c} \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} & x_1 \\ \bar{1} & \bar{2} & \bar{1} & \bar{1} & x_2 \\ \bar{1} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} & x_3 \\ \bar{0} & \bar{2} & \bar{2} & \bar{2} & x_4 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} \bar{1} \\ \bar{2} \\ \bar{2} \\ \bar{2} \end{array} \right]$$

הקטן של המערכת (g)

$$\left[\begin{array}{cccc|c} \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{1} & \bar{2} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{2} \\ \bar{1} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{2} & \bar{2} & \bar{2} & \bar{2} \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{R_2 \leftarrow R_2 - R_1 \\ R_3 \leftarrow R_3 - R_1}} \left[\begin{array}{cccc|c} \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{2} & \bar{0} & \bar{2} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{2} & \bar{2} & \bar{2} & \bar{2} \end{array} \right] \xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3 - 2R_2}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{2} & \bar{2} & \bar{2} & \bar{2} \end{array} \right] \rightarrow \begin{array}{l} \text{ח'ל עינין!} \\ (\bar{0} = \bar{2}) \end{array}$$

$$\boxed{(\bar{1}, \bar{2}, \bar{2}, \bar{2}) \notin \text{Span } S} \quad \text{כן}$$

הפסגון $\bar{e}$ איז 3 צימט אפסגון $\bar{e}$
איז 2.

שאלה 4

$U, V \subseteq \mathbb{F}^n$ מרחבים תת-מרחביים.

(א) נתון כי $V = \text{Span}\{v_1, \dots, v_k\}$ ו- $U = \text{Span}\{u_1, \dots, u_m\}$.

הוכחה: נניח $v \in V$. אז v יכול להיכתב כצירוף ליניארי של $v_1, \dots, v_k$.
 $\text{Span}\{v_1, \dots, v_k\} = V$ כלומר, V הוא המרחב שנוצר על ידי $v_1, \dots, v_k$.

נניח $v \in V$ ו- $v \notin U$. אז $\text{Span}\{v_1, \dots, v_k, v\} \neq U$.
 היות ו- $\text{Span}\{v_1, \dots, v_k\} \subseteq V$ (כי $v_1, \dots, v_k \in V$), קיים $v_{k+1} \in V$ כך ש-

$v_{k+1} \notin \text{Span}\{v_1, \dots, v_k\}$.

בהינתן הוכחנו ש- $\{v_1, \dots, v_k, v_{k+1}\}$ היא

בסיס של V . בהנחה, אם קיבלנו $v_{k+1} \in \text{Span}\{v_1, \dots, v_k\}$, אז v_{k+1} הוא צירוף ליניארי של $v_1, \dots, v_k$.
 אם $v_{k+1} \notin \text{Span}\{v_1, \dots, v_k\}$, אז v_{k+1} איננו צירוף ליניארי של $v_1, \dots, v_k$.
 אז $\{v_1, \dots, v_k, v_{k+1}\}$ היא בסיס של V .

זו סתירה, ולכן בהכרח $\text{Span}\{v_1, \dots, v_k\} = V$. $\square$

(ב) נתון כי $U \subseteq V$ ו- $(\dim U = k = \dim V - 1)$.
 צ"ל $U = V$.

הוכחה: יהי $\{v_1, \dots, v_k\}$ בסיס של U .
 אז $v_1, \dots, v_k \in U \subseteq V$. לפי סעיף (א), $\text{Span}\{v_1, \dots, v_k\} = U$.

בסיס של V לכן $V = \text{Span}\{v_1, \dots, v_k, v_{k+1}\}$.
 אבל $v_{k+1} \in U$ (כי $v_{k+1} \in V$ ו- U תת-מרחב של V).
 לכן $V = \text{Span}\{v_1, \dots, v_k\} = U$. $\square$

שאלה 5

(פתור את מערכת של ארבע קשרים ליניאריים)

המערכת $AX=B$ - $AX=0$ כאשר A היא מטריצה 4×6 ו- B היא וקטור

$$B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{כך } B \text{ היא}$$

$$\begin{array}{c} A \\ \left[\begin{array}{cccc|cc} -1 & -3 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 6 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{R_2 \leftarrow R_2 + 3R_1 \\ R_3 \leftarrow R_3 - R_1}} \left[\begin{array}{cccc|cc} -1 & -3 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -10 & 6 & 7 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{R_3 \leftarrow 2R_3 + R_2 \\ R_4 \leftarrow 5R_4 + R_2}} \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cc} -1 & -3 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -10 & 6 & 7 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 26 & 12 & 2 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3 - \frac{13}{4}R_2} \left[\begin{array}{cccc|cc} -1 & -3 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -10 & 6 & 7 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{9}{4} & 2 & 0 \end{array} \right] \quad (*)$$

$$12 - \frac{13}{4} \cdot 3 = \frac{48-39}{4} = \frac{9}{4}$$

נבדוק אם המערכת $A\vec{x}=\vec{0}$ היא פתירה יחידה (כלל) $\vec{x}=\vec{0}$.

לכן מטריצה A היא 4×6 ו- B היא

היא 4×1 ו- B היא 4×1 מטריצה, $\dim \text{Span } B = 4 = \dim \mathbb{Q}^4$

מכאן 4 וקטור $\vec{x}$ $\in \text{Span } B = \mathbb{Q}^4$ $\Leftrightarrow B$ בסיס $\mathbb{Q}^4$

כלומר (פתור את המערכת) $A\vec{x}=B$

i.R. 2 p. 1 (*) - N

$$\frac{9}{4}x_4 = 2 \Rightarrow \boxed{x_4 = \frac{8}{9}}$$

$$8x_3 + 3x_4 = 0 \Rightarrow 8x_3 = -3x_4 = -\frac{8}{3} \Rightarrow \boxed{x_3 = -\frac{1}{3}}$$

$$\begin{aligned} -10x_2 + 6x_3 + 7x_4 &= 2 \Rightarrow -10x_2 - 2 + \frac{56}{9} = 2 \\ &\Rightarrow -10x_2 = 4 - \frac{56}{9} = \frac{36-56}{9} = -\frac{20}{9} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{x_2 = \frac{2}{9}}$$

$$-x_1 - 3x_2 + 2x_4 = 1 \Rightarrow -x_1 = \frac{2}{3} + \frac{16}{9} = 1$$

$$\Rightarrow -x_1 = 1 + \frac{2}{3} - \frac{16}{9} = \frac{15-16}{9} = -\frac{1}{9}$$

$$\Rightarrow \boxed{x_1 = \frac{1}{9}}$$

$$(1, -1, 0, 0) = \frac{1}{9}(-1, 3, -1, 0)$$

: p. 1

$$+ \frac{2}{9}(-3, -1, 2, 2)$$

$$+ (-\frac{1}{3})(0, 6, 1, 4)$$

$$+ \frac{8}{9}(2, 1, 0, 1)$$

6. Aufgabe

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_{4 \times 5}(\mathbb{Z}_2)$$

$$A\vec{x} = \vec{0}$$

~) LNN ~) ~) ~) ~) (10)

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{R_3 \leftarrow R_3 + R_1 \\ R_4 \leftarrow R_4 + R_1}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3 + R_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{R_4 \leftarrow R_4 + R_3} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$$\boxed{x_4 = t}, \boxed{x_5 = s}$$

frei wählbar - x_4, x_5

$$\boxed{x_3 = 0}$$

$$x_2 + x_3 + x_4 = 0 \Rightarrow \boxed{x_2 = -t = t} \leftarrow (a = -a, \mathbb{Z}_2^{-1})$$

$$x_1 + x_2 + x_5 = 0 \Rightarrow \boxed{x_1 = t + s}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} t+s \\ t \\ 0 \\ t \\ s \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Null A פנים

$$B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

נבדל מוקדנות

שני הוקטורים ב-B אינם פרופורציונליים, ולכן B זוג בסיס.

אכן B בסיס ל-Null A.

(ק) כמקור מכלי B טקטורי שורה: $\{(1, 0, 0, 0, 1), (1, 1, 0, 1, 0)\}$

נדגה כפי למצוא בסיס אחר ל- $\text{Span } B = \text{Null } A$.

$$(*) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftarrow R_2 - R_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

↑ ↑
מובילים

אוסף ל-B מכלי הוקטורים e_3, e_4, e_5 ונבדל מוקדנות.

$$B' = \left\{ (1, 0, 0, 0, 1), (0, 1, 0, 0, 0), (0, 0, 1, 0, 0), (0, 0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 0, 1) \right\}$$

$e_3 \qquad e_4 \qquad e_5$

(ברוק שזה בסיס ל- $(\mathbb{Z}_2)^5$ לא צריך).

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{הפסולות}]{(*)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

rank = 5

אכן B' בסיס ל- $(\mathbb{Z}_2)^5$ שכל מכלי B.

7.2

$$0 = \overset{u}{0} + \overset{v}{0} \in U + V \quad \text{כך } \underbrace{0 \in U+V}_{\text{כאן}} \quad (*)$$

$$\text{כל } u, u' \in U, v, v' \in V \text{ נקרא } w, w' \in U+V \quad (*)$$

$$\text{כך } w = u+v \quad w' = u'+v' \\ w+w' = u+v+u'+v' = \underbrace{(u+u')}_U + \underbrace{(v+v')}_V \in U+V$$

$$\text{כך } w+w' \in U+V$$

$$\text{כל } u \in U, v \in V \text{ נקרא } w \in U+V \quad (*)$$

$$\square \quad \alpha \cdot w = \alpha(u+v) = \underbrace{\alpha u}_U + \underbrace{\alpha v}_V \in U+V$$

$$V = \text{Span } T, \quad U = \text{Span } S \quad (*)$$

$$U+V = \text{Span}(S \cup T) \quad (*)$$

$$\text{נראה: } \text{Span}(S \cup T) \subseteq U+V$$

$$\text{כל } w_1, \dots, w_r \in S \cup T \text{ נקרא } w \in \text{Span}(S \cup T) \quad (*)$$

$$w = \alpha_1 w_1 + \dots + \alpha_r w_r \quad \text{כך } w_i \in S \text{ או } w_i \in T \quad (*)$$

$$w_i = w_i + 0 \in U+V \quad \text{כל } w_i \in S \quad (*)$$

$$w_i = 0 + w_i \in U+V \quad \text{כל } w_i \in T \quad (*)$$

$$i \in \{1, \dots, r\} \text{ כך } w_i \in U+V \quad (*)$$

$$\text{לכן } w = \alpha_1 w_1 + \dots + \alpha_r w_r \in U+V \quad (*)$$

שאלה 8

ייתכן ש" $U, V \subseteq \mathbb{R}$ אינן ניתבות כך ש- $UV \subseteq U$ או $UV \subseteq V$ צ"ל $V \subseteq U$ או $U \subseteq V$.

הוכחה: לוקחים $U \subseteq V$ אזי $UV \subseteq V$ זה ברור.
 נעביר נניח ש- $U \not\subseteq V$.
 נניח קיים $u \in U$ כך ש- $u \notin V$.

יהי $v \in V$. היות ו- $UV \subseteq U$ ו- $UV \subseteq V$ אינן ניתבות, נקבל ש- $uv \in U$ או $uv \in V$.

לכן, $u+v \in V$, $u \notin V$, אזי $u = (u+v) - v \in V$ וזה סתירה.
 לכן קיימת $u+v \in U$, $u \notin V$.
 נניח $v = (u+v) - u \in U$.

הוכחנו אז ש- $u \in U$, $v \in U$ כלומר $U \subseteq V$. $\square$

9.12

-2 γ $B_1, \dots, B_r \in F$ $\alpha_{j1}, \dots, \alpha_{jm}$ $\alpha_{j1}, \dots, \alpha_{jm}$

$$B_1 w_1 + \dots + B_r w_r = \vec{0}$$

$$B_1 = \dots = B_r = 0 \quad \text{f.3}$$

$\alpha_{j1}, \dots, \alpha_{jm}$

$$\vec{0} = B_1 w_1 + \dots + B_r w_r = \sum_{j=1}^r B_j w_j$$

$$= \sum_{j=1}^r B_j (\alpha_{j1} v_1 + \dots + \alpha_{jm} v_m)$$

$$= \left(\sum_{j=1}^r B_j \alpha_{j1} \right) v_1 + \dots + \left(\sum_{j=1}^r B_j \alpha_{jm} \right) v_m$$

$\mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n$ $v_1, \dots, v_m$ $\alpha_{j1}, \dots, \alpha_{jm}$

$$\sum_{j=1}^r B_j \alpha_{j1} = \dots = \sum_{j=1}^r B_j \alpha_{jm} = 0$$

$\alpha_{j1}, \dots, \alpha_{jm}$

$$B_1 u_1 + \dots + B_r u_r = \sum_{j=1}^r B_j u_j = \sum_{j=1}^r B_j (\alpha_{j1}, \dots, \alpha_{jm})$$

$$= \left(\sum_{j=1}^r B_j \alpha_{j1}, \dots, \sum_{j=1}^r B_j \alpha_{jm} \right) = (0, \dots, 0)$$

$\Rightarrow \gamma \alpha_{j1}, \dots, \alpha_{jm}$ $\mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n$ $u_1, \dots, u_r$ $\alpha_{j1}, \dots, \alpha_{jm}$

$$\square \text{ . } \alpha_{j1}, \dots, \alpha_{jm}, \quad B_1 = \dots = B_r = 0$$

אלה 10

הוכחה:

② $\Leftrightarrow$ ①. נתון מערכת $Ax=b$ יש פתרון יחיד.

(קראו x_0)

לפי בארה מערכת $Ax=\vec{0}$ יש פתרון y שונה מ- $\vec{0}$.

ט"ז $A(x_0+y) = Ax_0 + Ay = b$ וכן x_0+y גם פתרון של $Ax=b$.

הוא - $x_0 \neq x_0+y$ (כי $y \neq \vec{0}$), יש מערכת אינסופית של -

$Ax=b$ יש פתרון יחיד. לכן קבוצה של $Ax=\vec{0}$ יש רק

הפתרון $x=\vec{0}$.

① $\Leftrightarrow$ ③: (קראו את המשפט המכונה $[A|\vec{0}]$ לצורה

מפויגה ~~מפויגה~~ מצומצמת, $[B|\vec{0}]$.

הוא אפשרי $Ax=\vec{0}$ יש פתרון יחיד, ק- B אין שורה אפס.

הוא - B מדרגה מקסימלית, $B=I_n$.

שהאלמנט $\text{rank } A = n$.

אם $\dim \text{Row } A = \text{rank } A = n$, מהמשפט

הוא - $\text{Row } A \subseteq \mathbb{F}^n$, $\dim \mathbb{F}^n = n$, $\text{Row } A = \mathbb{F}^n$.

(אם אלה 4).

$\mathbb{F}^n$ קבוצה
 אם מסתכן מהתצאה, $\forall$ השורות A מכילות n גזים $\mathbb{F}^n$.
 היתרון A של n שורות והיתרון n גזים $\mathbb{F}^n$ הוא
 מתייחס n , שורות A הן גזים $\mathbb{F}^n$.

$\textcircled{4} \Leftarrow \textcircled{3}$: אם משלים מהתצאה

$$\dim \text{Col} A = \text{rank } A = \dim \text{Row } A = n$$

$\uparrow$
 כי שורות A גזים $\mathbb{F}^n$.

~~אם A היא מטריצה $n \times n$ אז $\text{rank } A = n$ אם ורק אם $\det A \neq 0$~~

כמו בקודמתה $\textcircled{3} \Leftarrow \textcircled{4}$, זה אומר שאם A היא
 גזים $\mathbb{F}^n$.

$\textcircled{2} \Leftarrow \textcircled{4}$: (אם A היא מטריצה $n \times n$ אז $\text{rank } A = n$ אם ורק אם $\det A \neq 0$).

אם $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{F}$ קיימים $\mathbb{F}^n$.
 יתוצא כך $b = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n$.

$$\text{ה'ל} \quad A \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \dots & \alpha_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n$$

אם $Ax = b$ יש פיתרון יחיד $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

לכל n

נתון כי $B \subseteq S$, $S \subseteq \mathbb{F}^n$

אם $B' \subseteq S$ אז $B \subsetneq B' \subseteq S$

כדי ש- B תהיה בסיס של $\text{Span } S$

הוכחה נכונה: $V = \text{Span } S$

(א) כי B היא בסיס של V . (ואם אחרת כי $V = \text{Span } B$)

(ב) נניח להיפך: $\text{Span } B \neq V$. הרי $\text{Span } B \subsetneq V$.

~~(כ) $S \subseteq \text{Span } B$, כי כל $v \in V$ ניתן לכתוב v כצירוף ליניארי של איברי B .~~

~~אם $S \subseteq \text{Span } B$, אז $\text{Span } S \subseteq \text{Span } B$.~~

(אחרת, $V = \text{Span } S \subseteq \text{Span } B$, וקבל $\text{Span } B = V$).

בהינתן $v \in S$ כך ש- $v \notin \text{Span } B$.

אם $B' := B \cup \{v\}$ היא בסיס.

אז $B \subsetneq B' \subseteq S$ וכל $v \in V$ ניתן לכתוב v כצירוף ליניארי של איברי B' .

אכן קהכרה $V = \text{Span } B$. $\square$