

אלגברה לינארית א – תרגיל 2

יש להגיש את התרגיל **בתחילת** התרגול ביום ד' ה-4/12.
ניתן גם להגיש לתא שלי (מספר 52) עד יום ד' ה-4/12 בשעה 18:00.

שאלה 1

בסעיפים הבאים, $"ab"$ הן שתי הספרות האחרונות של תעודת הזהות שלכם. חשבו את הדרגה של המטריצות הבאות:

$$A = \begin{bmatrix} \bar{2} & \bar{0} & \bar{a} & \bar{b} & \bar{2} \\ \bar{3} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{4} & \bar{10} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{1} & \bar{0} & \bar{6} & \bar{1} & \bar{7} \end{bmatrix} \text{ מעל } \mathbb{Z}_{11} \text{ א.}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & a \\ b & b & b & -2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \text{ מעל } \mathbb{Q} \text{ ב.}$$

שאלה 2

יהיו $"ab"$ שתי הספרות האחרונות של תעודת הזהות שלכם.
תהי $S = \{(\bar{1}, \bar{1}, \bar{1}, \bar{0}), (\bar{1}, \bar{2}, \bar{0}, \bar{2}), (\bar{a}, \bar{b}, \bar{1}, \bar{2}), (\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{2})\} \subseteq (\mathbb{Z}_3)^4$.

א. מצאו בסיס ל- $\text{Span } S$.

ב. האם $(\bar{1}, \bar{2}, \bar{2}, \bar{2}) \in \text{Span } S$? אם כן, הביעו אותו כצירוף לינארי של אברי S . אם לא, הוכיחו את קביעתכם.

שאלה 3

יהיו $"ab"$ שתי הספרות האחרונות של תעודת הזהות שלכם. תהי

$$S = \{(-1, -3, -1+i, a), (2i, 2i, -1+i, b+i), (1, -1, 2i, 2), (i+1, 3i-1, 2i, i)\} \subseteq \mathbb{C}^4$$

א. מצאו בסיס ל- $\text{Span } S$.

ב. האם $(1, i, -1, -i) \in \text{Span } S$? אם כן, הביעו אותו כצירוף לינארי של אברי S . אם לא, הוכיחו את קביעתכם.

שאלה 4

יהי $\mathbb{F}$ שדה ויהיו U ו- V שני תתי-מרחבים ממימד k של $\mathbb{F}^n$.

א. יהיו $v_1, \dots, v_k \in V$ וקטורים בלתי תלויים לינאריים. הוכיחו כי $\{v_1, \dots, v_k\}$ בסיס ל- V .

ב. הראו כי אם $U \subseteq V$ אז $U = V$.

הערה: על מנת להוכיח כי $A = B$ יש להראות שלכל $a \in A$ מתקיים $a \in B$ ולכל $b \in B$ מתקיים $b \in A$.

שאלה 5

תהי $B = \{(-1, 3, -1, 0), (-3, -1, 2, 2), (0, 6, 1, 4), (2, 1, 0, 1)\}$.

א. הראו כי B בסיס למרחב הוקטורי $\mathbb{Q}^4$.

ב. יהיו "ab" שתי הספרות האחרונות של תעודת הזהות שלכם. הביעו את הוקטור $(1, -1, a, -b)$ כצירוף לינארי של אברי B .

שאלה 6

תהי:

$$A = \begin{bmatrix} \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{1} \end{bmatrix} \in M_{4 \times 5}(\mathbb{Z}_2)$$

א. מצאו בסיס לתת-המרחב $\text{Null } A := \{v \in (\mathbb{Z}_2)^5 : Av = 0\}$ של $(\mathbb{Z}_2)^5$.

ב. מצאו בסיס ל- $(\mathbb{Z}_2)^5$ שמכיל את הבסיס שמצאתם בסעיף א.

שאלה 7

יהי $\mathbb{F}$ שדה ויהיו U ו- V שני תתי מרחבים של $\mathbb{F}^n$. נגדיר:

$$U + V = \{u + v : u \in U, v \in V\}$$

א. הוכיחו כי $U + V$ תת-מרחב של $\mathbb{F}^n$.

ב. תהיינה S ו- T תתי קבוצות של $\mathbb{F}^n$ כך ש- $U = \text{Span } S$ ו- $V = \text{Span } T$. הוכיחו כי $U + V = \text{Span}(S \cup T)$.

ג. יהי B בסיס ל- U ויהי C בסיס ל- V . האם $B \cup C$ בסיס ל- $U + V$? אם כן, הוכיחו. אם לא, תנו דוגמא נגדית.

שאלה 8

יהי $\mathbb{F}$ שדה ויהיו $U, V \subseteq \mathbb{F}^n$ תתי-מרחבים. נניח כי $U \cup V$ הוא גם תת-מרחב של $\mathbb{F}^n$. הוכיחו כי $U \subseteq V$ או $V \subseteq U$.
הערה: על מנת להוכיח כי $A \subseteq B$ יש להראות שלכל $a \in A$ מתקיים $a \in B$.

שאלה 9

יהי $\mathbb{F}$ שדה ויהיו $m, n, r \in \mathbb{N}$. יהיו וקטורים בלתי תלויים לינארית ב- $\mathbb{F}^m$ ויהיו $v_1, \dots, v_m$ וקטורים בלתי תלויים לינארית ב- $\mathbb{F}^n$. לכל $i \in \{1, \dots, r\}$ נכתוב

$$u_i = (\alpha_{i1}, \dots, \alpha_{im})$$

ונגדיר

$$w_i = \alpha_{i1}v_1 + \dots + \alpha_{im}v_m \in \mathbb{F}^n$$

הוכיחו כי הוקטורים $w_1, \dots, w_r$ בלתי תלויים לינארית.

שאלה 10

יהי $\mathbb{F}$ שדה, תהי $A \in M_{n \times n}(\mathbb{F})$ מטריצה ריבועית ויהי $b \in \mathbb{F}^n$ וקטור עמודה. הוכיחו כי התנאים הבאים שקולים:

(1) $Ax = \vec{0}$ למשוואה פיתרון יחיד ב- $\mathbb{F}^n$ (הפיתרון הוא $x = \vec{0}$).

(2) $Ax = b$ למשוואה פיתרון יחיד.

(3) שורות A הן בסיס ל- $\mathbb{F}^n$.

(4) עמודות A הן בסיס ל- $\mathbb{F}^n$.

מוותר להשתמש בכל המשפטים מההרצאה.

הפלצה: הוכיחו כי (1) גורר את (2), (2) גורר את (3), (3) גורר את (4) ו-(4) גורר את (1).

שאלה 11

יהי $\mathbb{F}$ שדה, תהי $S \subseteq \mathbb{F}^n$ תת-קבוצה ותהי $B \subseteq S$. נניח כי B בת"ל, אבל לכל $B' \subsetneq S$, B' הקבוצה B' תלויה לינארית. הוכיחו כי B בסיס של $\text{Span } S$.

שאלה 12

זכרו כי קבוצת הפולינומים $\mathbb{R}[x]$ היא מרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$. אילו מבין הקבוצות הבאות היא תת-מרחב של $\mathbb{R}[x]$? הוכיחו את קביעתכם.

א. $U_1 = \{f \in \mathbb{R}[x] : f(6) \geq 0\}$

ב. $U_2 = \{f \in \mathbb{R}[x] : f(1) + f(2) = f(3)\}$

ג. $U_3 = \{f \in \mathbb{R}[x] : f(1-x) = f(x)\}$

ד. $U_4 = \{f \in \mathbb{R}[x] : |f(2)| \geq |f(-2)|\}$

שאלות רשות לתרגול נוסף

שאלה 13

לכל $\alpha \in \mathbb{C}$ ולכל $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$ נגדיר

$$\alpha \star (z_1, z_2) = \begin{cases} (\alpha z_1, \alpha z_2) & z_1 \neq 0 \\ (0, \bar{\alpha} z_2) & z_1 = 0 \end{cases}$$

א. הראו כי לכל $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ ולכל $u \in \mathbb{C}^2$ מתקיים:

$$1 \star u = u$$

$$(\alpha + \beta) \star u = \alpha \star u + \beta \star u$$

$$(\alpha\beta) \star u = \alpha \star (\beta \star u)$$

(המלצה: טפלו במקרים $u_1 \neq 0$ ו- $u_1 = 0$ בנפרד.)

ב. תנו דוגמא לוקטורים $u, v \in \mathbb{C}^2$ ו- $\alpha \in \mathbb{C}$ כך ש- $\alpha \star (u + v) \neq \alpha \star u + \alpha \star v$.

ג. האם $\mathbb{C}^2$ עם הפעולות $+$ ו- $\star$ הוא מרחב וקטורי מעל $\mathbb{C}$?

שאלה 14

יהי $\mathbb{F}$ שדה ותהייה $A, B \in M_{n \times m}(\mathbb{F})$. הוכיחו כי A ו- B שקולות שורה אם ורק אם $\text{Row } A = \text{Row } B$ (כלומר, מרחב השורות של A שווה למרחב השורות של B).
המלצה: הניחו קודם כי A ו- B הן מטריצות מזורגות מצומצמות. הראו כי אם $\text{Row } A = \text{Row } B$ אז $A = B$.

שאלה 15

יהי $\mathbb{F}$ שדה סופי עם q איברים ויהי W מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$ מממד k . הראו כי ב- W יש q^k איברים.

שאלה 16

יהי $\mathbb{F}$ שדה. קבוצה $\mathbb{E}$ המוכלת ב- $\mathbb{F}$ נקראת תת-שדה של $\mathbb{E}$ אם $(\mathbb{E}, +_{\mathbb{F}}, \times_{\mathbb{F}}, 0_{\mathbb{F}}, 1_{\mathbb{F}})$ שדה. לדוגמא, $\mathbb{Q}$ הוא תת-שדה של $\mathbb{R}$ ו- $\mathbb{R}$ הוא תת-שדה של $\mathbb{C}$.

א. הוכיחו כי תת-קבוצה $\mathbb{E}$ של $\mathbb{F}$ היא תת-שדה אם ורק אם מתקיימים התנאים הבאים:

$$1. -1_{\mathbb{F}} \in \mathbb{E}$$

$$2. \alpha, \beta \in \mathbb{E} \implies \alpha + \beta \in \mathbb{E}$$

$$3. \alpha, \beta \in \mathbb{E} \implies \alpha\beta \in \mathbb{E}$$

$$4. 0 \neq \alpha \in \mathbb{E} \implies \alpha^{-1} \in \mathbb{E}$$

ב. יהי $\mathbb{K}$ שדה ותהי $\varphi: \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{F}$ העתקה של שדות. נסמן ב- $\mathbb{E}$ את התמונה של $\mathbb{K}$, כלומר,

$$\mathbb{E} = \text{image}(\varphi) := \{\varphi(\alpha) \mid \alpha \in \mathbb{K}\}$$

הוכיחו כי $\mathbb{E}$ תת-שדה של $\mathbb{F}$.

ג. הראו שאם $\mathbb{E}$ תת-שדה של $\mathbb{F}$ אז $\mathbb{F}$ הוא מרחב וקטורי מעל $\mathbb{E}$ (ביחס לפעולות הכפל והחיבור של $\mathbb{F}$).

ד. מצאו בסיס ל- $\mathbb{C}$ כמרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$.

ה. מצאו בסיס ל- $\mathbb{Q}[\sqrt{5}]$ כמרחב וקטורי מעל $\mathbb{Q}$.

ו. יהי $\mathbb{F}$ שדה ממאפיין $p > 0$. הוכיחו כי ל- $\mathbb{F}$ יש תת-שדה עם p איברים. (רמז: שאלה 11 בתרגיל 1).

ז. היעזרו בסעיפים ג' ו-ד' ובשאלה 15 על מנת להראות שאם $\mathbb{F}$ שדה סופי ממאפיין p , אז קיים $n \in \mathbb{N}$ כך שבשדה $\mathbb{F}$ יש p^n איברים. הסיקו כי לא קיים שדה עם 6 איברים.

ח. יהי $\mathbb{F}$ שדה סופי. הסיקו מסעיף ז' כי $\text{char } \mathbb{F}$ מחלק את מספר האיברים ב- $\mathbb{F}$.

שאלה 17

יהי V מרחב וקטורי מממד n מעל שדה סופי $\mathbb{F}$ עם q איברים ויהי $k \in \{0, \dots, n\}$. כמה סדרות $(v_1, v_2, \dots, v_k)$ של k וקטורים בלתי תלויים לינארית ב- V יש? כמה קבוצות בת"ל עם k איברים יש ב- V ? כמה בסיסים יש ל- V ?

רמז: אם $\{v_1, \dots, v_r\}$ בת"ל ו- $u \notin \text{Span}\{v_1, \dots, v_r\}$ אז גם $\{v_1, \dots, v_r, u\}$ בת"ל.