

אלקטרה אינטרנל - חלק 1 - פירגון

אלקטרה 1

$$x \oplus y = x + y + 5$$

(1)

$$x \otimes y = 2xy$$

$$x \oplus y = x + y + 5 = y + x + 5 = y \oplus x$$

(1)

לפני החיבור $\oplus$ חלופי

$$\begin{aligned} x \oplus (y \oplus z) &= x \oplus (y + z + 5) = x + (y + z + 5) + 5 \\ &= (x + y + 5) + z + 5 = (x \oplus y) + z + 5 = (x \oplus y) \oplus z \end{aligned}$$

לפני החיבור $\otimes$ אסוציאטיבי

(2) האלמנט -5 הוא אלמנט נייטרלי $\oplus$

$$x \oplus (-5) = x + (-5) + 5 = x$$

הוכחה:

$$(-5) \oplus x = (-5) + x + 5 = x$$

$$x \otimes y = 2xy = 2yx = y \otimes x$$

(3)

לפני הכפל $\otimes$ חלופי

$$\begin{aligned} (x \otimes y) \otimes z &= 2(x \otimes y) \cdot z = 2(2xy)z \\ &= 2x(2yz) = 2x(y \otimes z) = x \otimes (y \otimes z) \end{aligned}$$

לפני הכפל $\otimes$ אסוציאטיבי

(4) הוכחה כי $\frac{1}{2}$ יונומורפיזם

$$x \otimes \frac{1}{2} = 2 \cdot x \cdot \frac{1}{2} = x$$

$$\frac{1}{2} \otimes x = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot x = x$$

הוכחה:

$$1 \otimes (0 \oplus 0) = 1 \otimes (0+0+5) = 1 \otimes 5 = 2 \cdot 1 \cdot 5 = 10 \quad (5)$$

$$(1 \otimes 0) \oplus (1 \otimes 0) = (2 \cdot 1 \cdot 0) \oplus (2 \cdot 1 \cdot 0) = 0 \oplus 0 = 0+0+5 = 5$$

לכן דיסטריביוטיביות לא נשמרת!

(6) $(\mathbb{R}, \oplus, \otimes)$ איננו חבורה כי דיסטריביוטיביות לא נשמרת

$$(\text{"} \oplus = + \text{"}) \quad \begin{aligned} x \oplus y &= x+y \\ x \otimes y &= 2xy \end{aligned} \quad (7)$$

(1) $\oplus$ חלופי ואסוציאטיבי + (חבורה ב- $\mathbb{R}$) חלופי ואסוציאטיבי

(2) 0 אייכר (נייטרלי ביחס ל- $\oplus$) כי 0 אייכר (נייטרלי ביחס ל- $+$)

(3) $\otimes$ חלופי ואסוציאטיבי $\otimes$ קצת פחות (3.1)

(4) $\frac{1}{2}$ יונומורפיזם ל- $\otimes$ קצת פחות (4.1)

$$\begin{aligned} x \otimes (y \oplus z) &= x \otimes (y+z) = 2x(y+z) \\ &= 2xy + 2xz = (2xy) \oplus (2xz) = (x \otimes y) \oplus (x \otimes z) \end{aligned} \quad (5)$$

לכן דיסטריביוטיביות לא נשמרת!

(6) $(\mathbb{R}, \oplus, \otimes)$ חלופי

$$x \oplus y = x$$

(2)

$$x \otimes y = x^2$$

$$1 \oplus 2 = 1$$

(1) החיבור $\oplus$ אינו חילופי כי

$$2 \oplus 1 = 2$$

אלא

החיבור $\oplus$ אסוציאטיבי כי

$$(x \oplus y) \oplus z = x \oplus z = x = x \oplus y = x \oplus (y \oplus z)$$

(2) לא קיים איבר אופס ביחס ל- $\oplus$

הוכחה: נניח ש- z איבר אופס ביחס ל- $\oplus$.

הנניח $\oplus$ כי z איבר אופס ביחס ל- $\oplus$.

$$0 = z \oplus 0 = z$$

כל

הנניח $\oplus$ כי z איבר אופס ביחס ל- $\oplus$.

$$1 = z \oplus 1 = z$$

כל

קיימים $z=0$ ו- $z=1$ ואז סתירה! לכן לא קיים איבר

אופס ביחס ל- $\oplus$.

[הערה: כל z הוא איבר אופס ביחס ל- $\oplus$ כי $x \oplus z = x$]

$$1 \otimes 2 = 1^2 = 1$$

(3) הכפל $\otimes$ אינו חילופי כי

$$2 \otimes 1 = 2^2 = 4$$

אלא

$$(2 \otimes 0) \otimes 0 = 2^2 \otimes 0 = 4 \otimes 0 = 16$$

הכפל $\otimes$ אינו אסוציאטיבי כי

$$2 \otimes (0 \otimes 0) = 2 \otimes (0^2) = 2 \otimes 0 = 4$$

אלא

(4) לא קיים אלבר יחידה (נייטרו) ביחס ל- $\otimes$

הוכחה: ללא השלחה ש- u אלבר (נייטרו) ביחס ל- $\otimes$.

$$2 = 2 \otimes u = 2^2 = 4$$

$\uparrow$ $\uparrow$
 כי u אלבר יחידה $\otimes$ הרכבה

נייטרו ביחס ל- $\otimes$

(5) דיסטריבוטיביות מקבילית

(*) $x \otimes (y \oplus z) = x \otimes y = x^2$ הוכחה:
 $= x^2 \oplus x^2 = (x \otimes y) \oplus (x \otimes z)$

(**) $(y \oplus z) \otimes x = y \otimes x = y^2$
 $= y^2 \oplus z^2 = (y \otimes x) \oplus (z \otimes x)$

[הערה: היה ו- $\otimes$ אלטרנטיביות, יש אפיון של דיסטריבוטיביות משמאל וימין (**).]

(6) $(R, \oplus, \otimes)$ אלטרנטיביות שבה $\otimes$ לא תאופי.

שאלה 2

נניח: $a, b \in F$, שבה F שדה, $ab \neq 0, 1$

(*) $(a - aba)^{-1} = a^{-1} + (b^{-1} - a)^{-1}$ צריך לחינה:

ישנן האלמנטים מוקדמים הלב (כלומר לא מתחלקים ב-0)

הוכחה: קודם נבדוק שיש ~~אלמנטים~~ האלמנטים מוקדמים הלב, כלומר,

$$a - aba \neq 0 \quad | \quad b^{-1} - a \neq 0, \quad b \neq 0$$

היום ו- $ab \neq 0$ מקיים $b \neq 0$ ו- $a \neq 0$ (כי $ab=0$ לא ייתכן).
אכן a^{-1} ו- b^{-1} קיימים.

$$ab = bb^{-1} = 1 \Leftrightarrow b^{-1} = a \quad \text{אם,} \quad b^{-1} - a = 0$$

ואם סתירה אחרת $ab \neq 1$ אכן $b^{-1} - a \neq 0$

$$a(1 - ba) = 0 \quad \text{אם} \quad a - aba = 0$$

$$ab = 1 \Leftrightarrow 1 - ba = 0 \quad \text{(כפול) } a^{-1} \text{ לא שני האלמנטים אוקדמים}$$

שוב קיבלנו סתירה אחרת $ab \neq 1$ אכן $a - aba \neq 0$

לכשן (וכיח שוב) (*)

$$\begin{aligned} (a^{-1} + (b^{-1} - a)^{-1})(a - aba) &= a^{-1}(a - aba) + (b^{-1} - a)^{-1}(a - aba) \\ &= a^{-1}a - a^{-1}aba + (b^{-1} - a)^{-1}((b^{-1} - a)ba) \\ &= 1 - ba + ba = 1 \end{aligned}$$

□ $(a - aba)^{-1} = a^{-1} + (b^{-1} - a)^{-1}$ אכן

3 שלב

1. $0 \neq a \in F$, $\forall n \in \mathbb{N}$ $a^n = 1$

2. $a^n = 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$

3. $X = \{a^0, a^1, a^2, a^3, \dots\}$ $\cong \mathbb{Z}$
 $= \{a^n \mid n \in \mathbb{N}\}$

4. $X \subseteq F$ $\setminus \{0\}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ $a^n = 1$

5. $a^k = a^m$ $\forall k, m \in \mathbb{N}$ $a^k = a^m$

6. $(k-1) \leq m < k$ $a^k = a^m$

$$1 = (a^k)^{-1} a^k = (a^k)^{-1} a^m$$
$$= \cancel{(a^k)^{-1} a^k} a^{m-k} = a^{m-k}$$

7. $a^n = 1$ $n = m-k$

שאלה 4

3. ל- $\mathbb{Q}[\sqrt{5}] = \{a+b\sqrt{5} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$
שדה קיים אפילו הכפל והחיבור ב- $\mathbb{R}$.

הוכחה:

* התיאור והכפל מקיימים. וסגור, תאוסף (קיסרית) כי התיאור ב- $\mathbb{R}$ מקיים את התכונות האלה.

* יש איברי אפס ואיבר יחידה כי
 $0 = 0 + 0 \cdot \sqrt{5} \in \mathbb{Q}[\sqrt{5}]$
 $1 = 1 + 0 \cdot \sqrt{5} \in \mathbb{Q}[\sqrt{5}]$

* צריך לבדוק ל- $\mathbb{Q}[\sqrt{5}]$ סגור תחת פעולות הכפל והחיבור.
יהיו $x, y \in \mathbb{Q}[\sqrt{5}]$. נניח
 $x = a + b\sqrt{5}$ $a, b \in \mathbb{Q}$
 $y = c + d\sqrt{5}$ $c, d \in \mathbb{Q}$

$$x + y = a + b\sqrt{5} + c + d\sqrt{5} = \underbrace{(a+c)}_{\in \mathbb{Q}} + \underbrace{(b+d)}_{\in \mathbb{Q}} \sqrt{5} \in \mathbb{Q}[\sqrt{5}]$$

$$x \cdot y = (a + b\sqrt{5})(c + d\sqrt{5}) = ac + bc\sqrt{5} + ad\sqrt{5} + 5bd \\ = \underbrace{(ac + 5bd)}_{\in \mathbb{Q}} + \underbrace{(ad + bc)}_{\in \mathbb{Q}} \sqrt{5} \in \mathbb{Q}[\sqrt{5}]$$

וקיבלנו $x+y, xy \in \mathbb{Q}[\sqrt{5}]$, כפונת.

* צריך לבדוק אם איבר ב- $\mathbb{Q}[\sqrt{5}]$ של איבר (32):

יהי $x \in \mathbb{Q}[\sqrt{5}]$. נניח $x = a + b\sqrt{5}$ $a, b \in \mathbb{Q}$

$$\text{ול- } -x = (-a) + (-b)\sqrt{5} \in \mathbb{Q}[\sqrt{5}] \text{ ולכן } -x \text{ של } x \text{ ב- } \mathbb{Q}[\sqrt{5}] \text{ (32) ב- } \mathbb{R}$$

$\mathbb{Q}[\sqrt{5}] \rightarrow$ נניח $\exists 0 \neq x \in \mathbb{Q}[\sqrt{5}]$ כך ש- $x^{-1} \in \mathbb{Q}[\sqrt{5}]$ *

$a, b \in \mathbb{Q}$ כך $x = a + b\sqrt{5}$ (2.1)

$a^2 - 5b^2 \neq 0$ (2.2)

$a^2 = 5b^2$ כל $a^2 - 5b^2 = 0$ - זה לא נכון, נניח $a, b \in \mathbb{Q}$

$\sqrt{5} = \frac{a}{b} \iff \frac{a}{b} = \frac{a}{b} \iff 5 = \frac{a^2}{b^2} = \left(\frac{a}{b}\right)^2$ כל $b \neq 0$

$\sqrt{5} \in \mathbb{Q} \iff$

$b=0$ נניח $\sqrt{5} \notin \mathbb{Q}$ כל

$a=0 \iff a^2=0 \iff 0=a^2-5b^2=a^2$ כל $a=0$

$a^2-5b^2 \neq 0$ כל $x \neq 0$ נניח $x = a + b\sqrt{5} = 0$ כל

$\sqrt{5} \in \mathbb{Q}$ כל

$y = \frac{a}{a^2-5b^2} - \frac{b}{a^2-5b^2}\sqrt{5} \in \mathbb{Q}[\sqrt{5}]$ (2.3)

$x \cdot y = (a + b\sqrt{5}) \left(\frac{a}{a^2-5b^2} - \frac{b\sqrt{5}}{a^2-5b^2} \right)$ כל

$= \frac{(a + b\sqrt{5})(a - b\sqrt{5})}{a^2 - 5b^2} = \frac{a^2 - 5b^2}{a^2 - 5b^2} = 1$



$\mathbb{Q}[\sqrt{5}] \rightarrow x \in \mathbb{Q}[\sqrt{5}]$ כל $x \neq 0$ נניח $x^{-1} \in \mathbb{Q}[\sqrt{5}]$

5.7.1

$$(a,b) + (c,d) = (a+c, b+d)$$

$$(a,b) \times (c,d) = (ac+5bd, ad+bc)$$

$\mathbb{R}^2$ מרחב וקטורי

האם $(\mathbb{R}^2, +, \times)$ וקטורי?

תשובה:

הנסת: קודם נבדוק אם $(0,0)$ הוא איבר נייטרלי:

$$(a,b) + (0,0) = (a+0, b+0) = (a,b)$$

$$(0,0) + (a,b) = (0+a, 0+b) = (a,b)$$

כן $(0,0)$ הוא איבר הנאם של $(\mathbb{R}^2, +, \times)$

$$\begin{aligned} (\sqrt{5}, 1) \times (\sqrt{5}, -1) &= (\sqrt{5} \cdot \sqrt{5} + 5 \cdot 1 \cdot (-1), \sqrt{5} \cdot (-1) + 1 \cdot \sqrt{5}) \\ &= (5 - 5, -\sqrt{5} + \sqrt{5}) \\ &= (0, 0) \end{aligned}$$

כן $\mathbb{R}^2$ אינו וקטורי! $(\mathbb{R}^2, +, \times) \not\leq \mathbb{R}^2$

הערה: הפעולה $\times$ על $\mathbb{R}^2$ מקיימת $(a,b) \times (c,d) = (ac+5bd, ad+bc)$ וזוהי תוצאה של תכונה מסוימת של המרחב $\mathbb{R}^2$.
בנוסף $(0,0)$ איבר הנאם ו- $(1,0)$ איבר יחידה.
אם $\mathbb{R}^2$ אינו וקטורי, אז לא ייתכן שיהיה $\mathbb{R}^2$ וקטורי.

בניסוח

דבריהם

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i\right) + \left(\sum_{i=1}^n b_i\right) = (a_1 + \dots + a_n) + (b_1 + \dots + b_n) \stackrel{\downarrow}{=} \quad (b)$$

$$= (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \dots + (a_n + b_n) = \sum_{i=1}^n (a_i + b_i)$$

$$c \cdot \left(\sum_{i=1}^n a_i\right) = c \cdot (a_1 + \dots + a_n) \stackrel{\uparrow}{=} ca_1 + ca_2 + \dots + ca_n \quad (7)$$

$$= \sum_{i=1}^n (ca_i)$$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_i \cdot b_j = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^m (a_i \cdot b_j) \right) \stackrel{(a)}{=} \sum_{i=1}^n \left(a_i \cdot \underbrace{\sum_{j=1}^m b_j}_c \right) \quad (c)$$

$$\stackrel{(a)}{=} \left(\sum_{j=1}^m b_j \right) \cdot \left(\sum_{i=1}^n a_i \right) = \left(\sum_{i=1}^n a_i \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^m b_j \right)$$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ij} = \sum_{i=1}^n a_{i1} = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n a_{ij} \quad (3) \quad \text{נוכח באינדוקציה על } m$$

הנני מוכיח עבור $m-1$ נוכח על ידי

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ij} &= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^{m-1} a_{ij} + a_{im} \right) \stackrel{(b)}{=} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{m-1} a_{ij} + \sum_{i=1}^n a_{im} \\ &= \sum_{j=1}^{m-1} \sum_{i=1}^n a_{ij} + \sum_{i=1}^n a_{im} = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n a_{ij} \end{aligned}$$

הוכח



7. הל

נניח $\deg f = n$, $f \in F[x]$

צריך להוכיח ש- f ו' את ה- n שורשים שונים ב- F .

הוכחה: יהיו $a_1, \dots, a_r$ שורשים שונים ב- F של f .
ע"כ $r \leq n$.

(כזו) $f_0 = f$ ו' $f_0(a_1) = 0$

קיימת חלוקה $f_1 \in F[x]$ כך ש- $f_0(x) = (x - a_1)f_1(x)$

(הוא) $a_2, \dots, a_r$ שורשים של f_1 : $2 \leq i \leq r$ ו' $f_1(a_i) = 0$

$$0 = f_0(a_i) = (a_i - a_1) \cdot f_1(a_i)$$

הוא $a_i - a_1 \neq 0$, $a_i \neq a_1$

הוא $f_1(a_i) = 0$ ו' $i > 1$

כאן $f_1(a_2) = 0$ ו' $f_1(x) = (x - a_2)f_2(x)$ כך ש- $f_2 \in F[x]$ קיימת חלוקה
ובאופן כללי $a_3, \dots, a_r$ הם שורשים של f_2 .

אפשר להמשיך באופן זה ו' $f_3, f_4, f_5, \dots, f_m$ פולינומים

$$f_2(x) = (x - a_3)f_3(x)$$

$\vdots$

$$f_m(x) = (x - a_r)f_{m+1}(x)$$

$$f(x) = f_0(x) = (x - a_1)f_1(x) = (x - a_1)(x - a_2)f_2(x)$$

$$= \dots = \underbrace{(x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_r)}_{\text{פולינום ממעלה } r} f_{m+1}(x)$$

$$\square \quad n = \deg f \geq r \iff f \text{ ממעלה } r \text{ פולינום ממעלה } r$$

8 7/10

$$\overline{5} \cdot \overline{1} = \overline{5} \quad \overline{5} \cdot \overline{3} = \overline{15} = \overline{2} \quad \overline{5} \cdot \overline{6} = \overline{30} = \overline{4}$$

$$\overline{5} \cdot \overline{2} = \overline{10} \quad \overline{5} \cdot \overline{4} = \overline{20} = \overline{7} \quad \overline{5} \cdot \overline{7} = \overline{35} = \overline{9}$$

$$\text{in } \mathbb{Z}_{13}^{-*} \quad (10)$$

$$\overline{5} \cdot \overline{8} = \overline{40} = \overline{1}$$

$$(\mathbb{Z}_{13}^{-*}) \quad \overline{5}^{-1} = \overline{8} \quad \text{10/}$$

$$(24^{100} - 4^{100}) \bmod 13$$

10 10/13 7/13 (2)

$$\begin{aligned} \overline{24}^{100} - \overline{4}^{100} &= \overline{11}^{100} - \overline{4}^{100} \\ &= (-\overline{2})^{100} - \overline{4}^{100} \end{aligned}$$

10 20/13 10/13 7/13
in $\mathbb{Z}_{13}^{-*}$

$$(-\overline{2})^2 = \overline{4}$$

$$(-\overline{2})^{100} = \overline{4}^{50} = \overline{3}$$

$$\overline{4}^2 = \overline{16} = \overline{3}$$

$$\overline{4}^4 = \overline{3}^2 = \overline{9}$$

$$\overline{4}^8 = \overline{9}^2 = \overline{3}$$

$$\overline{4}^{16} = \overline{3}^2 = \overline{9}$$

$$\overline{4}^{24} = \overline{4}^{16} \cdot \overline{4}^8 = \overline{3} \cdot \overline{9} = \overline{1}$$

$$\overline{4}^{25} = \overline{4} \cdot \overline{4}^{24} = \overline{4} \cdot \overline{1} = \overline{4}$$

$$\overline{4}^{50} = \overline{4} \cdot \overline{4} = \overline{3}$$

$$\overline{4}^{100} = \overline{3} \cdot \overline{3} = \overline{9}$$

$$(-\overline{2})^{100} - \overline{4}^{100} = \overline{3} - \overline{9} = \overline{7}$$

$$(24^{100} - 4^{100}) \bmod 13 = 7$$

9.11.16

$$(i+1)x - y - z = 9+9i$$

:120

$$x - iy + 2z = 1$$

$$2ix + y + (3i-1)z = 0$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} i+1 & -1 & -1 & 9+9i \\ 1 & -i & 2 & 1 \\ 2i & 1 & 3i-1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -i & 2 & 1 \\ i+1 & -1 & -1 & 9+9i \\ 2i & 1 & 3i-1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{\begin{array}{l} R_2 \leftarrow R_2 - (i+1)R_1 \\ R_3 \leftarrow R_3 - 2iR_1 \end{array}}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -i & 2 & 1 \\ 0 & -2+i & -3-2i & 8+8i \\ 0 & -1 & -1-i & -2i \end{array} \right] \xrightarrow{\begin{array}{l} R_3 \leftarrow -R_3 \\ R_2 \leftrightarrow R_3 \end{array}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -i & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1+i & 2i \\ 0 & -2+i & -3-2i & 8+8i \end{array} \right] \xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3 + (2-i)R_2}$$

$$-1 - (i+1)(-1) = -1 + i^2 + i = -2+i$$

$$-1 - (i+1) \cdot 2 = -1 - 2i - 2 = -3-2i$$

$$9+9i - (i+1) \cdot 1 = 8+8i$$

$$1 - (2i) \cdot (-1) = 1 + 2i = -1$$

$$3i-1 - (2i) \cdot 2 = 3i-1-4i = -1-i$$

$$0 - (2i) \cdot 1 = -2i$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -i & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1+i & 2i \\ 0 & 0 & -i & 10+12i \end{array} \right] \xrightarrow{R_3 \leftarrow iR_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -i & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1+i & 2i \\ 0 & 0 & 1 & -12+10i \end{array} \right] \xrightarrow{\begin{array}{l} R_2 \leftarrow R_2 - (1+i)R_3 \\ R_1 \leftarrow R_1 - 2R_3 \end{array}}$$

$$-3-2i + (1+i)(2i) = -3-2i + 2+2i - i - i^2 = -i$$

$$8+8i + 2i(2-i) = 8+8i + 4i + 2 = 10+12i$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -i & 0 & 25-20i \\ 0 & 1 & 0 & 22+4i \\ 0 & 0 & 1 & -12+10i \end{array} \right] \xrightarrow{R_1 \leftarrow R_1 + iR_2}$$

$$2i - (1+i)(-12+10i) = 2i - (-12+10i) - i(-12+10i) = 2i + 12 - 10i + 12i + 10 = 22+4i$$

$$1 - 2(-12+10i) = 1 + 24 - 20i = 25-20i$$

$$\begin{array}{ccc} x & y & z \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 21 + 2i \\ 0 & 1 & 0 & 22 + 4i \\ 0 & 0 & 1 & -12 + 10i \end{array} \right] \end{array}$$

$$(25 - 20i) + i(22 + 4i) = 25 - 20i + 22i - 4 = 21 + 2i$$

$$\begin{array}{l} x = 21 + 2i \\ y = 22 + 4i \\ z = -12 + 10i \end{array}$$

10. حل

$$\begin{bmatrix} 2 & 6 & 3 \\ 4 & 2 & 2 \\ 5 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

حل باستخدام المصفوفة

$$5^{-1} = 3 \quad (5 \cdot 3 = 15 = 1)$$

$$2^{-1} = 4 \quad (2 \cdot 4 = 8 = 1)$$

$$4^{-1} = 2$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 6 & 3 & | & 2 \\ 4 & 2 & 2 & | & 1 \\ 5 & 4 & 1 & | & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{array}{l} R_1 \leftarrow 4R_1 \\ R_2 \leftarrow 2R_2 \\ R_3 \leftarrow 3R_3 \end{array}} \begin{bmatrix} 8 & 24 & 12 & | & 8 \\ 8 & 4 & 4 & | & 2 \\ 15 & 12 & 3 & | & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{array}{l} R_2 \leftarrow R_2 - R_1 \\ R_3 \leftarrow R_3 - R_1 \end{array}}$$

$$\begin{bmatrix} 8 & 24 & 12 & | & 8 \\ 0 & -20 & -16 & | & -6 \\ 0 & -12 & -9 & | & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{array}{l} R_3 \leftarrow R_3 - 2R_2 \\ R_1 \leftarrow R_1 - 3R_2 \end{array}} \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 & | & 10 \\ 0 & -20 & -16 & | & -6 \\ 0 & 0 & 0 & | & 10 \end{bmatrix}$$

المصفوفة هي

11 השאלה

$$\varphi(0_F) = \varphi(0_F + 0_F) = \varphi(0_F) + \varphi(0_F) \quad \text{ההכרח (b)}$$

$$\text{לכן } \varphi(0_F) = 0$$

$$0_E = \varphi(0_F) - \varphi(0_F) = \varphi(0_F) + \varphi(0_F) - \varphi(0_F) = \varphi(0_F)$$

$$\square \quad \varphi(0_F) = 0_E \quad \text{וכן}$$

$$[\text{לכן } \varphi(1_F) = 1_E, \text{ וההכרח (c)}]$$

$$\varphi(a) = \varphi(b), \quad a, b \in F \quad \text{לכן } a = b \quad \text{ההכרח (d)}$$

$$(a-b)^{-1} \quad \text{לכן } a \neq b \quad \text{ההכרח (e)}$$

$$0_E = 0_E \cdot \varphi((a-b)^{-1}) = (\varphi(a) - \varphi(b)) \cdot \varphi((a-b)^{-1}) \quad \text{ההכרח (f)}$$

$$= \varphi(a-b) \cdot \varphi((a-b)^{-1}) = \varphi((a-b) \cdot (a-b)^{-1}) = \varphi(1_F) = 1_E$$

$$\square \quad a = b \quad \text{לכן } 0_E \neq 1_E \quad \text{וכן}$$

$$\varphi(a+b\sqrt{5}) + \varphi(c+d\sqrt{5}) \quad \text{ההכרח (g)}$$

$$= (a-b\sqrt{5}) + (c-d\sqrt{5}) = (a+c) - \sqrt{5}(b+d)$$

$$= \varphi((a+c) + \sqrt{5}(b+d)) = \varphi((a+b\sqrt{5}) + (c+d\sqrt{5}))$$

$$\varphi(a+b\sqrt{5}) \cdot \varphi(c+d\sqrt{5}) = (a-b\sqrt{5}) \cdot (c-d\sqrt{5})$$

$$= ac - bc\sqrt{5} - ad\sqrt{5} + 5bd = (ac+5bd) - (bc+ad)\sqrt{5}$$

$$= \varphi((ac+5bd) + (bc+ad)\sqrt{5}) = \varphi((a+b\sqrt{5}) \cdot (c+d\sqrt{5}))$$

$$\square \quad \varphi(1) = \varphi(1 + 0\sqrt{5}) = 1 - 0\sqrt{5} = 1$$

$$\psi: \mathbb{Z}_p \rightarrow \mathbb{F} \quad \text{המקרה של } p \text{ זוגי} \quad (3)$$

$$\psi(\bar{n}) = n \cdot 1_{\mathbb{F}}$$

($p = \text{char } \mathbb{F}$ זוגי)

~~הוכחה כי ψ היא הומומורפיזם~~

נניח $n, m \in \mathbb{Z}$ ונראה כי $\psi(\overline{n+m}) = \psi(\bar{n}) + \psi(\bar{m})$

$$\psi(\overline{n+m}) = (n+m) \cdot 1_{\mathbb{F}} = n \cdot 1_{\mathbb{F}} + m \cdot 1_{\mathbb{F}} = \psi(\bar{n}) + \psi(\bar{m})$$

נניח $n, m \in \mathbb{Z}$ ונראה כי $\psi(\overline{nm}) = \psi(\bar{n}) \cdot \psi(\bar{m})$

$$\psi(\overline{nm}) = (nm) \cdot 1_{\mathbb{F}} = n \cdot (m \cdot 1_{\mathbb{F}}) = n \cdot \psi(\bar{m})$$

$$= (n \cdot m) \cdot 1_{\mathbb{F}} = \psi(\bar{n}) \cdot \psi(\bar{m})$$

$$= (n \cdot m) \cdot 1_{\mathbb{F}} = \psi(\bar{n}) \cdot \psi(\bar{m})$$

$$= \underbrace{d \cdot (p \cdot 1_{\mathbb{F}})}_{= 0_{\mathbb{F}}} + n \cdot 1_{\mathbb{F}} = 0_{\mathbb{F}} = n \cdot 1_{\mathbb{F}} = \psi(\bar{n})$$

$$\text{char } \mathbb{F} = p \Rightarrow 0_{\mathbb{F}}$$

$$\text{לכן, } \psi(\bar{n}) = n \cdot 1_{\mathbb{F}}$$

נראה כי ψ היא הומומורפיזם

$$\psi(\bar{1}) = 1 \cdot 1_{\mathbb{F}} = 1_{\mathbb{F}} \quad (*)$$

$$\psi(\overline{n+m}) = \psi(\bar{n} + \bar{m}) = (n+m) \cdot 1_{\mathbb{F}} \quad (*)$$

$$= n \cdot 1_{\mathbb{F}} + m \cdot 1_{\mathbb{F}} = \psi(\bar{n}) + \psi(\bar{m})$$

$$\psi(\overline{nm}) = \psi(\bar{n} \cdot \bar{m}) = (nm) \cdot 1_{\mathbb{F}} \quad (*)$$

$$= n \cdot (m \cdot 1_{\mathbb{F}}) = \underbrace{m \cdot 1_{\mathbb{F}} + \dots + m \cdot 1_{\mathbb{F}}}_n$$

$$= \underbrace{(m \cdot 1_{\mathbb{F}}) \cdot 1_{\mathbb{F}} + \dots + (m \cdot 1_{\mathbb{F}}) \cdot 1_{\mathbb{F}}}_n = (m \cdot 1_{\mathbb{F}}) \cdot (\underbrace{1_{\mathbb{F}} + \dots + 1_{\mathbb{F}}}_n) = (m \cdot 1_{\mathbb{F}}) \cdot (n \cdot 1_{\mathbb{F}})$$

$$= \psi(\bar{n}) \cdot \psi(\bar{m})$$

$\square$

$\psi: \mathbb{Q} \rightarrow F$ char $F = 0$ (7)
 $\psi\left(\frac{n}{m}\right) = \frac{n \cdot 1_F}{m \cdot 1_F} \quad (m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{Z})$
 $= (n \cdot 1_F) \cdot (m \cdot 1_F)^{-1}$

הוכחה: ψ היא מונומורפיזם של $\mathbb{Q}$ אל F (7)

$(m \cdot 1_F \neq 0, m \in \mathbb{N}) \quad m \in \mathbb{N} \quad (m \cdot 1_F)^{-1}$ (8)

$m, m' \in \mathbb{N}, n, n' \in \mathbb{Z} \quad \frac{n}{m} = \frac{n'}{m'} \quad (9)$

$\frac{n \cdot 1_F}{m \cdot 1_F} = \frac{n' \cdot 1_F}{m' \cdot 1_F}$

הוכחה: (9) $\Rightarrow$ $m \cdot 1_F \neq 0, \text{char } F = 0 \Rightarrow$ (10)

$nm' = n'm \Leftrightarrow \frac{n}{m} = \frac{n'}{m'} \quad (11)$

$nm' \cdot 1_F = n'm \cdot 1_F \Leftrightarrow$

$(n \cdot 1_F) \cdot (m' \cdot 1_F) = (n' \cdot 1_F) \cdot (m \cdot 1_F)$

$(n \cdot 1_F) \cdot (m' \cdot 1_F)^{-1} \cdot (m \cdot 1_F)^{-1} = (n' \cdot 1_F) \cdot (m \cdot 1_F)^{-1} \cdot (m' \cdot 1_F)^{-1}$

$\frac{n \cdot 1_F}{m \cdot 1_F} = \frac{n' \cdot 1_F}{m' \cdot 1_F}$

לכן ψ היא מונומורפיזם של $\mathbb{Q}$ אל F (12)

$\psi(1) = \psi\left(\frac{1}{1}\right) = \frac{1 \cdot 1_F}{1 \cdot 1_F} = \frac{1_F}{1_F} = 1_F$ (13)

$\psi\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) = \psi\left(\frac{ad+bc}{bd}\right) = \frac{(ad+bc) \cdot 1_F}{(bd) \cdot 1_F} \quad (14) \quad (a, c \in \mathbb{Z}, b, d \in \mathbb{N})$
 $= \frac{ad \cdot 1_F}{bd \cdot 1_F} + \frac{bc \cdot 1_F}{bd \cdot 1_F} = \frac{(a \cdot 1_F) \cdot (d \cdot 1_F)}{(b \cdot 1_F) \cdot (d \cdot 1_F)} + \frac{(b \cdot 1_F) \cdot (c \cdot 1_F)}{(b \cdot 1_F) \cdot (d \cdot 1_F)}$

$$= \frac{a \cdot 1_F}{b \cdot 1_F} + \frac{c \cdot 1_F}{d \cdot 1_F} = \psi\left(\frac{a}{b}\right) + \psi\left(\frac{c}{d}\right).$$

$$\psi\left(\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}\right) = \psi\left(\frac{ac}{bd}\right) = \frac{(ac) \cdot 1_F}{(bd) \cdot 1_F} \quad (*)$$

$$= \frac{(a \cdot 1_F) \cdot (c \cdot 1_F)}{(b \cdot 1_F) \cdot (d \cdot 1_F)} = \frac{(a \cdot 1_F)}{(b \cdot 1_F)} \cdot \frac{(c \cdot 1_F)}{(d \cdot 1_F)} = \psi\left(\frac{a}{b}\right) \cdot \psi\left(\frac{c}{d}\right)$$

□