תבניות בילינאריות
וחוגים עם אינבולוציה

חיבור לשם קבלת התואר "דוקטור לפילוסופיה"

מאת:

אוריה אהרון פירסט

המחלקה למתמטיקה

הוגש לסנט של אוניברסיטת בר-אילן

רמת גן טבת, תשע"ג

עבודה זו נעשתה בהדרכתו של פרופ׳ עוזי וישנה
מהמחלקה למתמטיקה של אוניברסיטת בר-אילן.

תוכן עניינים

תודות

ברצוני להביע את תודתי העמוקה למנחה שלי, פרופ׳ עוזי וישנה, שתמך בי והדריך אותי החל מלימודי התואר השני. העבודה עם עוזי העשירה מאוד את הידע שלי במתמטיקה, כמו גם את הבנתי את העולם האקדמי. מילים בלבד לא יוכלו לתאר כמה סייע לי.

ברצוני גם להודות מאוד לפרופ׳ אליער רואן על העצות ועל ההכוונה, כמו גם על עזרתו הרבה בהגשת מאמרים לפרסום.

מספר לא מבוטל של אנשים הרימו תרומה למחקר המפורט בעבודה זו. אני אסיר תודה לכולם, ובפרט למיכאל מגרל ומני שלונסברג, על עזרתם בכל מה שערב טופולוגיה, לאלי מצרי, על עזרתו בבחירת ערכי המשתנים בדוגמאות 1.6.1 ו-1.6.2, לדייויד סולטמן, על שהציע את הבעיה שנידונה בחלק 2.9, וכן לאופיר גורודצקי, לתומר שלנק, ואחרים שהעצות שלהם הובילו לניסוח ולהוכחה של משפט 1.9.6.

אני רוצה להודות למשפחתי ולחברי, וביחוד לאלו באונ׳ בר-אילן, על שארחו לי לחברה, על ההשראה שסיפקו לי, ועל כך שהרשו לי לחלוק את מחשבותי עמם.

אחרונים חביבים, ברצוני להודות לסגל המנהלי של המחלקה למתמטיקה של אונ׳ בר-אילן, ובפרט למזיכרות המחלקה (והמזכירה לשעבר), מלי בכר, יעל מדר ולהלי בר, שדחפו אותי קדימה מאז הגעתי לבר-אילן כתלמיד תיכון מבולבל למדי.

הקדמה

הערה: הקדמה זו היא תרגום של ההקדמה האנגלית. על מנת למנוע ספק באשר לחלק מהשמות והמונחים העבריים, השם האנגלי המקביל יצויין לעיתים בסוגריים בצד השם העברי.

רקע

תבניות ריבועיות (quadratic forms) ותבניות הרמיטיות (hermitian forms) היוו נושא למחקר מאז המאה התשע-עשרה ומאז הן משמשות במגוון תחומים במתמטיקה ובפרט באלגברה, בגיאומטריה אלגברית ודיפרנציאלית ובטופולוגיה אלגברית. השימושים הרבים שנמצאו להם, הפכו אותן לבסוף לתחום מחקר בפני עצמו ויוצרים רבים (כגון וויט (Witt), מילנור (Milnor), פיסטר (Pfister) ואחרים) חקרו תבניות ריבועיות לשמן. הבעיות היסודיות בתחום זה כוללות את בעיית האיזומטריה (isometry; דהיינו להכריע מתי שתי תבניות הן איזומטריות), בעיית האיזוטרופיות (isotropy; דהיינו להכריע מתי תבנית היא איזוטרופית) ושאלת מבנה חבורת האיזומריה (isometry group). כל השאלות האלה נפתרו, במידת מה, עבור משפחות מיוחדות של שדות (כגון שדות מקומיים (local fields), שדות גלובליים (global fields), שדות סופיים, שדות סגורים ממשית (real-closed fields) ושדות סגורים אלגברית; ראה [**69**], [**86**], [**65**] והפניות).

השימושים הקלאסיים של תבניות ריבועיות נזקקו בעיקר לתבניות ריבועיות מעל שדות וחוגי מספרים (number rings), אך החל משנות השישים, תבניות ריבועיות מעל חוגים (לא חילופיים; עם אינבולוציה (involution)) החלו להופיע ולהיחקר. מחקר זה, שהיה חלוצי בזמנו, כולל את עבודותיהם של בק (Bak; [**6**]), קנבוש (Knebusch; [**55**]), בס (Bass; [**10**]), קוובמן שארלו ושולטה (Quebbemann, Scharlau, Schulte; [**71**]) ועוד רבים וטובים. עבודות אלו הובילו בסופו של דבר אל התורה העכשווית של קטגוריות הרמיטיות (hermitian categories), הקרויות גם קטגוריות עם דואליות (categories with duality), המשמשות כתשתית קטגורית לעבודה עם תבניות ריבועיות ותבניות בילינאריות. בין התוצאות המפורסמות ביותר על קטגוריות הרמטיות נמצאת הקביעה כי, תחת תנאים סבירים, התורה (theory) של תבניות ריבועיות מעל קטגוריות הרמיטית, ניתנת לצמצום (reduction) לתורת התבניות הריבועיות מעל חוגים עם חילוק (division rings) עם אינבולוציה (ראה [**71**] או [**86**, פרק 7]). ההשלכות של תוצאה זו מרחיקות לכת וכוללות שימושים רבים, כגון "משפט הצמצום של וויט" (Witt's Cancelation Theorem).

במקביל לנ"ל, מגוון חוקרים החלו ללמוד תבניות בילינאריות (bilinear forms; לא סימריות[1]) ותבניות כמו-בילינאריות (sesquilinear forms) מעל שדות. בעיית האיזומטריה של תבניות כאלה נחקרה ע"י וול (Wall; [**98**]) ועבודתו שימשה מאוחר יותר את ריהם (Riehm; [**76**]) שפתר באופן מפורש את בעיית האיזומטריה של תבניות בילינאריות לא מנוונות (non-degenerate) מעל שדות. כאן, *פיתרון* פירושו צמצום לבעיית האיזומטריה של תבניות הרמיטיות מעל שדות. הפיתרון של ריהם הורחב כמעט מייד לתבניות מנוונות (degenerate) בידי גבריאל (Gabriel; [**44**]) והכללות נוספות לתבניות כמו-בילינאריות (לדוגמא [**75**], [**84**]) ולמערכות של שתי תבניות בילינאריות ([**88**]) הופיעו מאוחר יותר. לעבודות אלו שימושים רבים גם כן, בעיקר עבור מציאת נציגים קנוניים למחלקות איזומטריה ולתוצאות אחרות בתורת המטריצות (לדוגמא, ראה [**46**], [**31**], [**101**], [**49**], [**51**], [**28**], [**93**]).

בשונה מתבניות ריבועיות, נראה שמעט מאוד ידוע על תבניות בילינאריות (לא סימטריות) מעל חוגים (שאינם שדות). מטרת עבודה זו היא למלא חלק מחסר זה.

[1] אלא אם הדבר מצויין בפירוש, איני מניח כי תבניות בילינאריות הן סימטריות.

תבניות בילינאריות מעל שדות – דוגמא

התזה שהגשתי בתואר השני עסקה בתבניות בילינאריות מעל שדות. בשנה שלאחר הגשתה, הבחנתי כי מרבית התוצאות בה, שלכאורה הצריכו שימוש רב באלגברה לינארית, ניתנות להוכחה ע״י שימוש בתורת החוגים בלבד. תובנה זו, שהוותה את נקודת הפתיחה של המחקר שלי, העלתה את החשד (המוצדק בדיעבד) כי תוצאות רבות על תבניות בילינאריות מעל שדות בעצם נכונות גם עבור תבניות בילינאריות מעל חוגים (מסויימים).

הרשו לי קודם להדגים כיצד ניתן לטפל בתבניות בילינאריות מעל שדות ע״י שימוש בחוגים. יהי F שדה ויהי (V,b) מרחב בילינארי רגולרי.[2] אזי b משרה אנטי-אוטומורפיזם (anti-automorphism) של $\mathrm{End}_F(V)$ הנתון ע״י $\sigma\mapsto\sigma^*$ באשר σ^* הוא האוטומורפיזם היחיד של V עבורו מתקיים

$$b(\sigma x,y)=b(x,\sigma^* y)$$

לכל $x,y\in V$. (אם התבנית b הייתה סימטרית או אנטי-סימטרית, אזי $*$ הייתה אינבולוציה). נגדיר $W_b=\{\sigma\in\mathrm{End}_F(V)\,|\sigma^{**}=\sigma\}$. אזי $(W_b,*|_{W_b})$ הוא חוג עם אינבולוציה המחזיק מידע רב אודות b. לדוגמא:

(1) קיימת התאמה 1-1 (one-to-one correspondence) בין פירוקים $b=b_1\perp\cdots\perp b_t$ לבין משפחות של אידמפוטנטים מאונכים בזוגות (pairwise orthogonal idempotents) $e_1,\dots,e_t\in W_b$ כך ש-$\sum_i e_i=1$ ו-$e_i^*=e_i$ לכל $1\le i\le t$. בפרט, התבניות b היא אי-פריקה (indecomposable; כלומר b אינה סכום של שתי תבניות לא טריוויאליות) אס״ם אין ב-W_b אידמפוטנטים לא טריוויאלים ויציבים תחת הפעולה של $*$.

(2) התבנית b היא היפרבולית (hyperbolic; כלומר, V הוא סכום ישר של שני תתי מרחבים איזוטרופיים לחלוטין (totally isotropic)) אס״ם האינבולוציה $*|_{W_b}$ היא היפרבולית (כלומר, קיים אידמפוטנט $e\in W_b$ המקיים $e+e^*=1$).

(3) σ היא איזומטריה של b אס״ם $\sigma\in\{\tau\in W_b|\tau^*\tau=1\}$.

למעשה, ניתן לבנות ״מילון״ המתרגם טענות על b לטענות על החוג $(W_b,*|_{W_b})$ *(ומכאן הכותרת של עבודת הדוקטורט)*.

כעת נראה כיצד ניתן להפוך את בעיית האיזומטריה של תבניות בילינאריות רגולריות לבעיית *שקילות* (congruence) ב-$(W_b,*|_{W_b})$: *הא-סימטריה* (asymmetry) של התבנית b מוגדרת להיות ההעתקה היחידה $\lambda:V\to V$ המקיימת

$$b(x,y)=b(y,\lambda x)$$

לכל $x,y\in V$. אזי *מחלקת הצמידות* (conjugacy class) של λ נשמרת תחת איזומטריה. נזכיר כי שני איברים $a,b\in W_b$ נקראים $*$-שקולים ($*$-congruent) או שקולים אם קיים $s\in W_b^\times$ כך ש-$a=s^*bs$. במקרה זה נרשום $a\sim b$. כעת, ניתן להראות כי:

(4) קיימת התאמה 1-1 (התלויה ב-b) בין מחלקות איזומטריה (isometry classes) של תבניות רגולריות עם א-סימטריה צמודה ל-λ ובין הקבוצה $\{a\in W_b^\times|a^*=a\}/\sim$ (כלומר, מחלקות שקילות של איברים הפיכים ויציבים תחת $*$ ב-W_b).

מ-(4) נובע שעל מנת לפתור את בעיית האיזומטריה של תבניות בילינאריות רגולריות עלינו לדעת

א. להכריע האם לשתי תבניות נתונות יש א-סימטריות צמודות (שקול למציאת צורת ג׳ורדן)

[2] התבנית b נקראת רגולרית אם ההעתקה $x\mapsto b(x,\ )$ מ-V אל V^* היא חח״ע ועל.

ב. לפתור את בעיית השקילות בחוג עם האינבולוציה $(W_b, *|_{W_b})$.

ניתן לחלץ את המבנה של החוג W_b מצורת ג'ורדן של האסימטריה של b, אך תיאור זה לא מאפשר עבודה נוחה עם $*$. (בנוסף, היות ואני מעוניין להמיר את F בחוג כללי, איני רוצה להסתמך על צורות ג'ורדן). לעומת זאת, מובטח לנו כי החוג $\bar{W}_b := W_b/\mathrm{Jac}(W_b)$ הוא פשוט למחצה (semisimple). יתיר על כן, ניתן להראות כי כל התכונות והטענות על W_b שהוזכרו עד כה ניתנות *להרמה* (lifting) מ-$\bar{W}_b$ אל W_b. לפיכך, ניתן לחקור את b על ידי חקירת F-אלגבראות פשוטות למחצה עם אינבולוציה (דהיינו, $\bar{W}_b$).

הבה ננצל זאת כדי לצמצם את בעיית האיזומטריה של תבניות בילינאיות רגולריות לאיזומטריה של תבניות הרמיטיות: תהי β האינבולוציה על $\bar{W}_b$ המושרה מ-$*$. אזי קל לראות כי $(\bar{W}_b, \beta)$ הוא מכפלה של חוגים עם אינבולוציה $\prod_{i=1}^{k}(W_i, \beta_i)$ כך שכל W_i הוא פשוט וארטיני או מהצורה $W_i' \times W_i'^{op}$ כאשר W_i' הוא פשוט וארטיני ו-β_i מחליפה בין W_i' ל-$W_i'^{op}$. בעיית השקילות ב-$\bar{W}_b$ שקולה לצירוף בעיות השקילות בחוגים $\{(W_i, \beta_i)\}_{i=1}^{k}$. כעת נתפצל למקרים: אם $W_i = W_i' \times W_i'^{op}$ כמו לעיל, אזי קל לוודא כי כל האיברים שהם הפיכים ו-$*$-יציבים ב-W_i שקולים זה לזה. במילים אחרות, בעיית השקילות ב-W_i היא *טריוויאלית*. לעומת זאת, במקרה ש-W_i הוא פשוט ארטיני, קיית אלגברת חילוק D_i ו-n_i טבעי כך ש-$M_{n_i}(D_i) \cong W_i$ (לפי משפט וודרבורן (Wedderburn); למעשה, D_i היא שדה במקרה שלנו). כעת נשתמש במשפט הידוע הבא:

משפט 0.1: תהי D אלגברת חילוק ממימד סופי מעל F. אם קיימת אינבולוציה β על החוג $M_n(D)$ אזי קיימת אינבולוציה α על D וקיימת תבנית 1 או (-1)-הרמיטית $h: D^n \times D^n \to D$ מעל (D, α) כך ש-β היא האינבולוציה המתאימה ל-h. כלומר, לכל $x, y \in D^n$ ו-$\sigma \in M_n(D)$ מתקיים $b(\sigma x, y) = b(x, \sigma^\beta y)$.

הוכחה: ראה [**2**, פרק X] להוכחת הקיום של α. ראה [**57**, משפט 4.2] להוכחת הקיום של h. במידה ו-D הוא שדה (כמו במקרה שלנו), אזי α היא הצמצום של β אל המרכז של $M_n(D)$ (שהוא כמובן D).

תהיינה α_i, h_i האיבולוציה והתבנית ההרמיטית המתאימות ל-β_i על פי המשפט האחרון ותהי S קבוצת ה-i-ים עבורם W_i פשוט. אזי מהנ"ל נובע כי ישנה התאמה 1-1 בין כל הקבוצות הבאות:

א. מחלקות איזומטריה של תבניות לא-מנוונות עם א-סימטריה צמודה ל-b.
ב. $\{\sigma \in W_b^{\times} | \sigma^* = \sigma\}/\sim$
ג. $\{\sigma \in \bar{W}_b^{\times} | \sigma^* = \sigma\}/\sim$
ד. $\prod_{i\in S}\{\sigma \in W_i^{\times} | \sigma^{\beta_i} = \sigma\}/\sim$
ה. משפחות $\{[b_i]\}_{i\in S}$ כך ש-$[b_i]$ היא מחלקת איזומטריה של תבנית הרמיטית n_i מימדית מעל (D_i, α_i).

(ההתאמה בין א ל-ב ובין ד ל-ה נובעת מ-(4) לעיל). תוצאה מיידית של הנ"ל היא:

מסקנה 0.2: איזומטריה של תבניות בילינאריות לא מנוונות מעל שדה ניתנת לצמצום לאיזומטריה של תבניות הרמיטיות מעל חוגים עם חילוק (שהם למעשה שדות במקרה שלנו).

מסקנה זו היא בדיוק הפיתרון של ריהם ([**76**]), אם כי הוא לא ניסח או הוכיח זאת באופן שהצגתי. היתרון של הגישה שנקטתי הוא בהיותה על טהרת תורת החוגים ובאי היסמכותה על אלגברה לינארית. על כן, ניתן לצפות כי רעיונות דומים יעבדו עבור תבניות בילינאריות מעל חוגים (מה שהתגלה כנכון). בנוסף, מסתבר שמספר עבודות הנוגעות לפתרון בעיות איזומטריה דומות הן מקרה מיוחד של הגישה הכללית שהוצגה כאן (לדוגמא, ראה [**75**], [**84**], [**88**] וגם [**44**]).

התוצאות המרכזיות

בעבודה זו הכללתי את הרעיונות הקודמים לתבניות בילינאריות מעל חוגים. התוצאות שהתקבלו היו מעל ומעבר למצופה; ע״י שינוי קל בהגדרת החוג W_b, התיאוריה שהוצגה הופכת ישימה לתבניות מנוונות (degenerate) וחשוב מכך, למערכות של תבניות בילינאריות (systems of bilinear forms). דבר זה הופך חלק מהתוצאות לחדשות אפילו עבור תבניות סימטריות. התוצאות שהתקבלו עבור מערכות של תבניות בילינארית מעל *חוגים טובים* (ראה פירוט בהמשך) בהם 2 הפיך כוללות את:

(א) משפט הצמצום של וויט (עבור מערכות של תבניות לאו-דווקא-סימטריות לאו-דווקא-רגולריות).

(ב) בעיית האיזומטריה ניתנת לצמצום לאיזומטריה של תבניות הרמיטיות מעל חוגים עם חילוק (זו הכללה של **[76]**, **[75]**, **[84]**, **[88]** עבור תבניות לא-סימטריות רגולריות, של **[44]** עבור תבניות לא-סימטריות לא-רגולריות ושל **[6]**, **[55]**, **[71]** ועבודות נוספות עבור תבניות סימטריות רגולריות).

(ג) קיים פירוק *לאיזוטופים* (ראה **[84]** להגדרה במקרה הלא-סימטרי, ראה [**86**, משפט 10.8] להגדרה במקרה הסימטרי, ראה חלק 4.12 בהמשך להגדרה כללית; זה מכליל את העבודות שצויינו ב-(ב)).

(ד) סיווג של תבניות (או מערכות של תבניות) בילינאיות אי פריקות (מכליל את **[93]**).

(ה) אם חוג הבסיס (base ring) הוא אלגברה ממימד סופי מעל שדה סגור אלגברית F ו-O היא חבורת האיזומטריה, אזי קיימת סדרה מדוייקת של חבורות אלגבריות (מעל F) $1 \to U \to O \to G \to 1$ כך ש-U היא הרדיקל האוניפוטנטי (unipotent radical) של O ו-G היא מכפלה של עותקים של $O_n(F), GL_m(F), Sp_{2k}(F)$. (סדרת החבורות המתקבלת מהנקודות הרציונליות מעל F של הסדרה לעיל הינה מדוייקת גם כן; זה מכליל את **[14]**.)

תוצאות ושימושים נוספים שלא נכללו בעבודה זו עקב מגבלות מקום וזמן יפורסמו בנפרד.

החוגים הטובים הנזכרים לעיל, כוללים חוגים פרימריים למחצה (semiprimary; לדוגמא חוגים ארטיניים מימין או משמאל) ולמעשה גם את המשפחה הגדולה יותר של חוגים מושלמים למחצה (semiperfect) *ועל-פרימרים-למחצה* (pro-semiprimary); חוג יקרא על-פרימרי-למחצה אם הוא גבול הפוך (inverse limit) של חוגים פרימרים למחצה. לדוגמא, כל חוג מקומי למחצה (semilocal) R המתלכד עם הגבול ההפוך של החוגים $\{R/\mathrm{Jac}(R)^n\}$ הוא על-פרימרי-למחצה (חוגים כאלה נקראים גם חוגים מקומיים למחצה *שלמים*). כל התוצאות הקודמות מניחות כי המודול עליו מוגדרת התבנית (או מערכת התבניות) הוא מיוצג סופית (finitely presented). הנחות קלות נוספות נדרשות אם חוג הבסיס אינו פרימרי-למחצה (אך מודולים פרוייקטיביים (projective) נוצרים סופית מקיימים אותן).

על מנת לראות את התוצאות (א)-(ה) במסגרת מה שכבר ידוע בתחום, אציין כי השימוש בחוגים עם אינבולוציה על מנת ללמוד תבניות בילינארית סימטריות מעל חוגים קיים בספרות (ראה לדוגמא **[71]**, [**86**, פרק 7], [**16**, חלק 5]). גישה כזו גם הובילה להוכחת חלק מהתוצאות הקודמות עבור קטגוריות הרמיטיות המקיימות תנאים מסויימים. בפרט, (א)-(ד) לעיל ידועים עבור תבניות בילינאריות רגולריות מעל חוגי הערכה דיסקרטית שלמים (complete discrete valuation rings). בנוסף, א. בייר-פלוקיגר (E. Bayer-Fluckiger) ול. פיינסילבר (L. Fainsilber) הציגו ב-**[16]** דרך קנונית להכללת תוצאות על תבניות רגולריות לתבניות לא רגולריות ואף השתמשו בה כדי להכליל את משפט הצמצום של וויט ותוצאות אחרות לתבניות לא רגולריות. (אנו עוד נדון ב-**[16]** ביתר פירוט בהמשך.) אף על פי כן, בניגוד לתורה הסימטרית, נראה כי לא נעשה שימוש בחוגים עם אינבולוציה על מנת ללמוד תבניות לא סימטריות; ייתכן וזאת מפני שקשה מאוד להסיק תוצאות מבניות על החוג W_b כאשר חוג הבסיס אינו שדה (זו למעשה אחת המטרות של פרק 1). יתירה מכך, כל התוצאות שהוזכרו כעת מניחות כי המודול עליו מוגדרת התבנית הבילינארית הוא

רפלקסיבי (reflexive; ראה חלק 2.5), הנחה שאינה נדרשת עבור (א)-(ה). לסיכום, החידושים בתוצאות (א)-(ה) הם בעיקר במקרים הלא-סימטריים או לא-רגולריים, או במקרים בהם התבנית מוגדרת מעל מודול *לא רפלקסיבי* וכן במקרה שמדובר במערכת תבניות.

תבניות בילינאריות מעל חוגים

עד כה דיברנו על תבניות בילינאריות מעל חוגים בלי שהגדרנו אותן. אמנם ישנן מספר הגדרות כאלה בספרות המקצועית (לדוגמא, התבניות הכמו-לינאריות המוגדרות למטה; עיין במקורות המובאים בתחילת ההקדמה להגדרות נוספות), אך כל ההגדרות מניחות קיום אינבולוציה על חוג הבסיס. (זה גם נכון, במובן מסויים, עבור קטגוריות הרמיטיות). אחד החידושים של עבודה זו הוא בהצגת הגדרה חדשה המאפשר הגדרת תבניות בילינאריות מעל כל חוג (לא חילופי; אין צורך באינבולוציה).

הגדרה 0.3: יהי R חוג. R-מודול כפול (double R-module) הוא חבורה חיבורית K המצויידת בשתי פעולות $\odot_0,\odot_1:K\times R\to K$ כך ש-K הוא R-מודול ימני ביחס לכל אחת מהפעולות $\odot_0,\odot_1$ ולכל $a,b\in R$ ו-$k\in K$ מתקיים $(k\odot_0 a)\odot_1 b=(k\odot_1 b)\odot_0 a$. ($R$-מודולים כפולים שקולים קטגורית ל-(R^{op},R)-בימודולים).

אנטי-איזומורפיזם של R-מודול כפול K הוא פונקציה $\kappa:K\to K$ כך ש-a-$(k\odot_i a)^\kappa=k^\kappa\odot_{1-i}$ לכל $a\in R$, $k\in K$ ו-$i\in\{0,1\}$. אם בנוסף $\kappa\circ\kappa=id_K$, אזי κ נקראת אינבולוציה.

מרחב בילינארי מעל R הוא שלשה (M,b,K) כך ש-M הוא R-מודול ימני, K הוא R-מודול כפול ו-$b:M\times M\to K$ היא פונקציה דו-חיבורית (biadditive) המקיימת

$$b(xr,y)=b(x,y)\odot_0 r\qquad \text{ו-}\qquad b(x,yr)=b(x,y)\odot_1 r$$

לכל $x,y\in M$ ו-$r\in R$. אם κ היא אינבולוציה של K, אזי b תיקרא κ-סימטרית אם $b(x,y)=b(y,x)^\kappa$ לכל $x,y\in M$.

ההגדרה האחרונה, המשמשת כבסיס לעבודת הדוקטורט, כוללת בתוכה את ההגדרות במקורות שהוזכרו קודם לכן. בנוסף, התוצאות (א)-(ה) הוכחו עבור תבניות בילינאריות במובן שהוגדר כעת. עוד נציין שכשם שקטגוריות הרמיטיות הן תשתית קטגורית עבור תבניות ריבועיות, כך ניתן להגדיר קטגוריות עם דואליות כפולה (categories with a double duality) המשמשות כתשתית קטגורית עבור התבניות הבילינאריות שזה עתה הוגדרו. (יש לציין כי *במובן מסויים*, ההגדרה החדשה אינה מקרה מיוחד של קטגוריה הרמיטית).

דוגמא 0.4: יהי $(R,*)$ חוג עם אינבולוציה ויהי $\lambda\in R$ איבר מרכזי (central) המקיים $\lambda^*\lambda=1$. אזי מרחב כמו-לינארי (sesquilinear space) מעל $(R,*)$ הוא זוג (M,b) כך ש-M הוא R-מודול ימני ו-$b:M\times M\to R$ היא פונקציה דו-חיבורית המקיימת

$$b(x,yr)=b(x,y)r\qquad \text{ו-}\qquad b(xr,y)=r^*b(x,y)$$

לכל $x,y\in M$ ו-$r\in R$. אם בנוסף $b(x,y)=\lambda b(y,x)^*$, אז b נקראת λ-הרמיטית. כעת נהפוך את R ל-R-מודול כפול ע"י כך שנגדיר $r\odot_0 a=a^*r$ ו-$r\odot_1 a=ra$ לכל $r,a\in R$. בנוסף, נגדיר $\kappa:R\to R$ ע"י $r^\kappa=r^*$. אזי כאשר חושבים על R כמודול כפול מעל עצמו, κ היא אינבולוציה של R. כמו-כן, (M,b) הוא מרחב כמו-לינארי מעל $(R,*)$ אס"ם (M,b,R) הוא מרחב בילינארי במובן של הגדרה 0.3. יתיר על כן, התבנית b היא λ-הרמיטית אס"ם היא κ-סימטרית.

החל מכאן, על מנת למנוע דו-משמעות, אנו נקרא לתבניות כמו-לינאריות בשם *תבניות בילינאריות קלאסיות*. התבניות מהגדרה 0.3 יקראו לעיתים *תבניות בילינאריות כלליות*.

דוגמא 0.5: תבניות בילינאריות כלליות כוללות בתוכן גם את התורה של מערכות של תבניות בילינאריות. באמת, יהי R חוג ותהי $\{(M,b_i,K_i)\}_{i\in I}$ מערכת של תבניות בילינאריות מעל ה-R-

מודול M. נגדיר $K=\prod_{i\in I}K_i$ ו-$b\colon M\times M\to K$ ע״י $b(x,y)=\left(b_i(x,y)\right)_{i\in I}\in K$. אזי (M,b,K) הוא מרחב בילינארי וכל טענה על מרחב זה שקול לטענה על המערכת $\{(M,b_i,K_i)\}_{i\in I}$.

על מנת להגדיר מהן התבניות הרגולריות (regular), עלינו להציג סימון חדש: עבור R-מודול כפול K ו-$i\in\{0,1\}$, נכתוב K_i כדי לציין את ה-R-מודול הימני המתקבל מ-K ע״י הפעולה $\odot_i$. יהי (M,b,K) מרחב בילינארי מעל R. אזי b משרה שתי פונקציות הנקראות *המפה הנלווית הימנית* (right adjoint map) ו*המפה הנלווית השמאלית* (left adjoint map) של b. הן מוגדרות כדלקמן:

$$Ad_b^{\ell}\colon M\to \mathrm{End}_R(M,K_1),\qquad \left(Ad_b^{\ell}x\right)y=b(x,y)$$

$$Ad_b^{r}\colon M\to \mathrm{End}_R(M,K_0),\qquad \left(Ad_b^{r}x\right)y=b(y,x)$$

התבנית b תיקרא רגולרית מימין (לא-מנוונת (injective) מימין) אם Ad_b^r היא חח״ע ועל (חח״ע). רגולריות משמאל ואי-נוון משמאל מוגדרים באופן דומה. יש לציין כי אין שקילות בין הגרסה הימנית והגרסה השמאלית של תכונות אלו. חרף זאת, שקילות קיימת עבור תבניות κ-סימטריות (באשר κ היא אינבולוציה כלשהי של K).

שימו לב כי אם (M,b,K) הוא רגולרי מימין, אזי לכל $\sigma\in\mathrm{End}_R(M)$ קיים $\sigma^*\in\mathrm{End}_R(M)$ יחיד כך ש-$b(\sigma x,y)=b(x,\sigma^* y)$ לכל $x,y\in M$. קל לבדוק כי הפונקציה $*$ היא אנטי-אנדומורפיזם (anti-endomorphism) של החוג $\mathrm{End}_R(M)$.[3] אנטי-אנדומורפיזם זה נקרא האנטי-אנדומורפיזם המתאים ל-b .

תבניות בילינאריות ואנטי-אנדומורפיזמים

יהי F שדה ויהי V מרחב וקטורי סוף-מימדי מעל F. משפט ידוע קובע כי הפונקציה השולחת תבנית בילינארית קלאסית מעל V אל האנטי-אוטומורפיזם של $\mathrm{End}_F(V)$ המתאים לה משרה התאמה 1-1 בין תבניות בילינאריות קלאסיות המוגדרות על V, עד כדי כפל בקבוע (scalar), ובין ה-F-אנטי-אוטומורפיזמים של $\mathrm{End}_F(V)$. תחת התאמה זו, תבניות סימטריות ותבניות חילופין (alternating forms) מתאימות לאינבולוציות האורתוגונליות (orthogonal) והסימפלקטיות (symplectic) של $\mathrm{End}_F(V)$, בהתאמה. למשפט זה, שקשור בחלקו למשפט 0.1 לעיל, קיימות מספר הכללות עבור תבניות מעל אלגבראות פשוטות מרכזיות. הכללות אלו ממלאות תפקיד חשוב בקשר בין תבניות ריבועיות ואינבולוציות, ראה [**57**, פרק 1] לפרטים.

חשיבותו של המשפט הנ״ל והכללותיו, כמו גם צורך בהכללה של משפט 0.1 לחוגים עם חילוק כללים (המשפט כפי שנוסח תקף רק לאלגברות חילוק ממימד סופי), עודדו אותי לחקור האם ההתאמה בין תבניות ואנטי-אוטומורפיזמים ניתנת להכללה לתבניות בילינאריות כלליות. באמת, כפי שצויין לפני מספר פסקאות, כל תבנית רגולרית מימין מעל R-מודול ימני M משרה אנטי-אנדומורפיזם של $\mathrm{End}_R(M)$. על כן, ניתן לצפות כי תהיה התאמה 1-1 בין תבניות רגולריות מימין על M, *עד כדי יחס שקילות כלשהו*, ובין אנטי-אנדומורפיזמים של $\mathrm{End}_R(M)$. בעייה זו נלמדת באריכות בפרק 3. התוצאות שהתקבלו היו מפתיעות וכללו תוצאות חיוביות ושליליות כאחד.

ראשית, מסתבר שקיימת דרך *קנונית* להתאים לכל אנטי-אנדומורפיזם α של $W\coloneqq\mathrm{End}_R(M)$ מרחב בילינארי (M,b_α,K_α) כך ש-

$$b_\alpha(\sigma x,y)=b_\alpha(x,\sigma^\alpha y)$$

לכל $x,y\in M$ ו-$\sigma\in W$. בנוסף, אם α היא אינבולוציה, אזי קיימת אינבולוציה κ_α של K_α כך ש-b_α היא κ_α-סימטרית. עובדה זו ראויה לציון שכן, למיטב ידיעתי, במקרה של תבניות קלאסיות,

[3] אנטי-אנדומורפיזם של חוג מוגדר להיות העתקה חיבורית מהחוג לעצמו המשמרת את היחידה והופכת את סדר הכפל. אנטי-אנדומורפיזם שהוא גם חח״ע ועל יקרא אנטי-אוטומורפיזם.

לא קיימת דרך *קנונית* לבנות ההתאמה ההפוכה. יותר מכך, הבנייה שנמצאת ברוב ההוכחות מערבת שימוש בכלים "כבדים" כגון משפט סקולם-נותר (Skolem-Noether) שאינם ניתנים לשימוש במקרה שלנו. הסיבה לכך שקיימת בנייה קנונית עבור תבניות בילינאריות כלליות היא החופש בבחירת המודול הכפול K_α; אין צורך לזהות אותו עם מודול כפול נתון מראש. בנוסף לנ"ל ישנו מועמד טבעי ליחס השקילות הנדרש עבור קיום ההתאמה (ראה פיסקה קודמת): שתי מרחבים בילינארים $(M,b,K),(M,b',K')$ יקראו *שקולים* אם קיים איזומורפיזם של מודולים כפולים $f\colon K\to K'$ כך ש-$b'=f\circ b$. (ברור כי תבניות שקולות משרות את אותו אנטי-אנדומורפיזם על W).

דוגמא 0.6: יהי F שדה. אזי שתי תבניות בילינאריות קלאסיות מעל מרחב וקטורי V הן שקולות אס"ם הן זהות עד כדי כפל בקבוע.

דוגמא 0.7: יהי F שדה, יהי V מרחב וקטורי סוף-מימדי מעל F ויהי α אנטי-אנדומורפיזם של $\mathrm{End}_F(V)$. היות ו-F איזומורפי למרכז של $\mathrm{End}_F(V)$ (כ-F-אלגבראות) α משרה (אנטי-) אנדומורפיזם של F שנסמן גם כן ב-α. ניתן להראות כי ה-F-מודול הכפול K_α איזומורפי ל-F-מודול הכפול המתקבל מ-F ע"י הגדרת $k\odot_0 a=a^\alpha k$ ו-$k\odot_1 a=ka$ לכל $k,a\in F$. בפרט, אם $\alpha|_F=id_F$, נובע כי b_α היא תבנית בילינארית קלאסית. יותר מכך, אם α היא אינבולוציה אורתוגונלית, אז $\kappa_\alpha=id_F$ ולכן b_α היא תבנית בילינארית סימטרית, ואם α היא אינבולוציה סימפלקטית, אז $\kappa_\alpha=-id_F$ ולכן b_α היא תבניות אנטי-סימטרית (ולמעשה אף תבנית חילופין). באופן דומה, אם α היא אינבולוציה מטיפוס שני (second kind), אז b_α היא תבנית λ-הרמיטית מעל (F,α).
באופן כללי, יש התאמה 1-1 בין *כל* האנטי-אנדומורפיזמים של $\mathrm{End}_F(V)$ ובין *כל* התבניות הבלינאריות (הכלליות) הרגולריות מימין על V, על כדי שקילות (אך חלק מהאנטי-אנדומורפיזמים מתאימים לתבניות בילינאריות לא-קלאסיות).

לצערי, הדוגמא האחרונה אינה משקפת את כלל המקרים. ראשית, מסתבר כי התבנית b_α אינה בהכרח רגולרית מימין (ולמעשה היא עלולה להיות זהותית 0). במקרה כזה ההתאמה בין תבניות ואנטי-אנדומורפיזמים נכשלת! יתירה מכך, יחס השקילות שהוגדר לעיל אינו טוב מספיק: קיימת תבנית בילינארית רגולרית מימין b עם אנטי-אנדומורפיזם מתאים α כך ש-b_α אינה שקולה ל-b (למרות שגם b_α רגולרית). את הבעיה האחרונה דווקא ניתן לפתור בקלות: מעתה נסב את תשומת ליבנו אך ורק לתבניות ששקולות ל-b_α עבור α כלשהו. תבניות כאלו נקראות *גנריות* (generic; וכל תבנית לא-גנרית ניתנת להמרה ב*גנריזציה* (generization) שלה). למרות זאת, הבעיה הראשונה עומדת בעינה ויכולה להפתר רק ע"י מעבר למקרים מיוחדים. בין התוצאות החיוביות שהתקבלו באופן זה:

משפט 0.8: יהי M R-מודול ימני ויהי $W:=\mathrm{End}_R(M)$. אזי:

א. אם M פרוייקטיבי (projective) נוצר סופית, אז יש התאמה 1-1 בין תבניות בילינאריות גנריות רגולריות *מימין*, עד כדי שקילות, ובין אנטי-*אנדו* מורפיזמים של W.

ב. אם M הוא יוצר (generator; של R-Mod), אז יש התאמה 1-1 בין תבניות בילינאריות גנריות רגולריות (*מימין ומשמאל*), עד כדי שקילות, ובין אנטי-*אוטו* מורפיזמים של W.

בעוד שהמשפט הקודם מספק את ההתאמה הדרושה, להיות פרוייקטיבי ולהיות יוצר הן הנחות חזקות למדי. דבר זה גם לי לתהות האם דרישת הרגולריות מ-b_α הייתה מיותרת. באמת, המינימום הנדרש מתבנית $b\colon M\times M\to K$ על מנת שיהיה לה אנטי-אוטומורפיזם תואם הוא שלכל $\sigma\in\mathrm{End}_R(M)$ יהיה קיים $\sigma^*\in\mathrm{End}_R(M)$ יחיד כך ש-$b(\sigma x,y)=b(x,\sigma^* y)$. דרישה זו חלשה מרגולריות ימנית ותבניות המקיימות אותה נקראות *יציבות מימין* (right stable).

דוגמא 0.9: תהיינה $b_1, b_2: \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}$ תבניות בילינאריות קלאסיות מעל $\mathbb{Z}$ המוגדרות ע״י $b_1(x,y) = x^T \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} y$ ו-$b_2(x,y) = x^T \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} y$. אזי b_1, b_2 הן לא-מנוונות, אך לא רגולריות. בנוסף, b_1 יציבה מימין ומשמאל; האנטי אוטומורפיזם שהיא משרה על $M_2(\mathbb{Z})$ הוא אינבולוציית השחלוף. לעומת זאת, b_2 אינה יציבה (לא משמאל ולא מימין). זאת משום שלא קיים $\sigma' \in M_2(\mathbb{Z})$ כך ש-$b_2\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x, y\right) = b_2(x, \sigma' y)$.

הספקות שלי הוצדקו כאשר נמצאה דוגמא למודול M מעל חוג R עבורו *כל* האנטי-אוטומורפיזמים של $W = \mathrm{End}_R(M)$ השרו תבניות יציבות שאינן רגולריות. יותר מכך, קיימת דוגמא של R, M, α כך ש-b_α היא מנוונת ויציבה. גילוין של דוגמאות אלו הביא למספר תוצאות בעלות גוון דומה שעיקרן: אם R ו-M ניתנים למיקום (localization) באופן שאחריו M יהיה פרוייקטיבי נוצר סופית או יוצר, אז תחת הנחות מסויימות, b_α היא לא-מנוונת ויציבה לכל אנטי-*אוטו*מורפיזם α. חלק מתוצאות אלו מסוכם במשפט הבא, שהוא מקרה מיוחד של משפט 3.7.19 בהמשך.

משפט 0.10: יהי R חוג ויהי M מודול נאמן (faithful) הצפוף (dense) במודול נוצר סופית (לדוגמא, אם M נוצר סופית). אם לפחות אחד מהבאים מתקיים, אז קיימת התאמה 1-1 בין אנטי אוטו-מורפיזמים של $\mathrm{End}_R(M)$ ובין תבניות גנריות ויציבות (מימין ומשמאל) על M, עד כדי שקילות.

(1) M חסר פיתול (torsion-free) ו-R הוא חוג גולדי ראשוני למחצה (semiprime Goldie ring; לדוגמא אם R הוא תחום נות׳רי או תחום המקיים זהות פולינומיאלית).

(2) הכללה של (1): קיימת ב-R קבוצת מכנים דו-צדדית (two-sided denominator set) של איברים רגולריים S, כך שהחוג RS^{-1} הוא פסאודו-פרובניוס ימני (right pseudo-Frobenius) ו-M הוא חסר פיתול ביחס ל-S (S-torsion-free).

הוכחת המשפט מערבת מציאת תנאים מספיקים לכך שחוג האנדומורפיזמים של $\tilde{E}(M)$, *הסגור הרציונלי* (rational hull) של M, הוא *חוג השברים הסימטרי המקסימלי* של $\mathrm{End}_R(M)$. בפרט, אחת מתוצאות המשנה של ההוכחה היא המשפט העמוק הבא.

משפט 0.11: יהי R חוג כך ש-$Q^s_{max}(R)$, חוג השברים הסימטרי המקסימלי של R, מתלכד עם R. אזי לכל R-מודול יוצר רפלקסיבי-למחצה (torsionless), M, קיים יוצר רפלקסיבי למחצה, G, כך ש-$M \subseteq_d G$, כל אוטומורפיזם של M מתרחב ל-G באופן יחיד, ו-$\mathrm{End}_R(G) = Q^s_{max}(\mathrm{End}_R(M))$. בפרט, אם R_R הוא קו-יוצר (cogenerator), אזי לכל יוצר M מתקיים $\mathrm{End}_R(M) = Q^s_{max}(\mathrm{End}_R(M))$ ואם R הוא פסאודו-פרובניוס מימין, אז כל R-מודול נאמן מקיים $\mathrm{End}_R(M) = Q^s_{max}(\mathrm{End}_R(M))$.

יש עדיין מספר רב של שאלות פתוחות בנוגע לרגולריות או ליציבות של b_α. למשל, לא הצלחתי למצוא דוגמא של תחום נות׳רי R, מודול נוצר סופית M ואנטי-אוטומורפיזם α כך ש-b_α אינה רגולרית. ההשערה הבאה פתוחה גם כן.

השערה 0.12: אם M הוא מודול לא-סינגולרי (nonsingular) אז קיימת התאמה 1-1 בין אנטי-אוטומורפיזמים של $\mathrm{End}_R(M)$ ובין תבניות יציבות גנריות על M, עד כדי שקילות.

שני שימושים

ישנם שני שימושים יפים לחלק א של משפט 0.8. הראשון שבהם הוא הוכחה פשוטה למשפט הבא של אוסבורן (Osborn; [**66**]).

משפט 0.13: יהי (W, α) חוג פשוט למחצה עם אינבולוציה כך שאין ב-W אידמפוטנטים לא טריוויאלים ו-α-יציבים (α-invariant). אזי (בדיוק) אחד מהבאים מתקיים:

א. W הוא חוג עם חילוק.
ב. קיים חוג עם חילוק D כך ש-$W \cong D \times D^{op}$. תחת האיזומורפיזם, α מחליפה בין D ו-D^{op}.
ג. קיים שדה F כך ש-$W \cong M_2(F)$. תחת האיזומורפיזם, α היא אינבולוציה סימפלקטית.

במקור, אוסבורן הניח הנחות נוספות על (W,α) (כגון $2 \in W^{\times}$) וההוכחה שניתנה על ידו כללה לימוד מדוקדק של אלגברת ז'ורדן המתאימה לאינבולוציה α. הוכחה חלופית פשוטה יותר למשפט הינה כדלקמן: ניתן לעבור בקלות למקרה בו W פשוט וארטיני. לכן, קיים חוג עם חילוק D ו-D-מרחב-וקטורי ימני V כך ש-$W \cong \mathrm{End}_D(V)$. כעת, לפי משפט 0.8, קיימת תבנית בילינארית רגולרית $b_\alpha : V \times V \to K_\alpha$ המתאימה ל-α ובנוסף, b_α היא κ_α-סימטרית. לפי ה"מילון" שהוצג מקודם, הטענה על W שקולה לטענה ש-b_α היא אי-פריקה (indecomposable). מזה ניתן להסיק בקלות כי $\dim_D V$ הוא 1 או 2, כאשר במקרה האחרון D הוא שדה ו-b_α היא תבנית חילופין (alternating form). אבל זה גורר את המשפט.

השימוש השני למשפט 0.8 הוא תשובה חלקית לבעיה שהוצעה לי ע"י דייויד סולטמן (David Saltman) וזו לשונה: תחת אילו הנחות, חלק מ- או כל התנאים הבאים שקולים עבור חוג R:

(1) R שקול מוריטה (Morita equivalent) לחוג עם אינבולוציה.
(2) R שקול מוריטה לחוג עם אנטי-אוטומורפיזם.
(3) R שקול מוריטה ל-R^{op}.

הגרירות (1)⇐(2)⇐(3) ברורות. לעומת זאת, משפט ידוע קובע כי עבור אלגבראות פשוטות מרכזיות (3)⇐(1) (ולכן כל התנאים שקולים). סולטמן הוכיח כי (3)⇐(1) גם עבור אלגבראות אזומאיה (Azumaya; [**82**]).[4] בעזרת משפט 0.8 (כמו גם בעזרת הגילוי של התבניות הבילינאריות הכלליות), הצלחתי להוכיח את הטענה הבאה (השווה עם [**82**, משפט 4.2]). לפני שאנסח אותה, נזכיר כי כל (R^{op},R)-מודול, ובפרט (R^{op},R)-פרו-יוצר (progenerator), ניתן להפוך ל-R-מודול כפול ע"י הפיכת מבנה ה-R^{op}-מודול השמאלי למבנה R-מודול נוסף על R.

טענה 0.14: יהי R חוג ויהי M R-מודול פרו-יוצר. אזי ל-$\mathrm{End}_R(M)$ קיים אנטי-אוטומורפיזם (קיימת אינבולוציה) אם"ם קיימת תבנית רגולרית (וסימטרית) $b: M \times M \to K$ כך ש-K מתקבל מ-(R^{op},R)-פרו-יוצר.

בהוכחת הטענה מראים כי לכל אנטי-אוטומורפיזם α של $\mathrm{End}_R(M)$ המודול הכפול K_α הוא בעצם (R^{op},R)-פרו-יוצר ואז בוחרים את b להיות b_α.

טענה 0.14 אומרת שכדי להוכיח כי (3)⇐(2), אפשר להסתפק בלהוכיח שלכל (R^{op},R)-פרו-יוצר K קיים מרחב בילינארי רגולרי (M,b,K) כך ש-M הוא פרו-יוצר. הטענה האחרונה שגויה באופן כללי, אך תחת הנחות סופיות מסויימות על קטגוריית המודולים הפרוייקטיביים הימיניים מעל R, ניתן להבטיח את הקיום. הנחות סופיות כאלה מתקיימות כאשר R הוא מושלם למחצה (semiperfect), לכן נקבל:

משפט 0.15: אם R מושלם למחצה, אז (3)⇐(2).

אני משער כי (3) אינו גורר את (2) באופן כללי, אך לא יכולתי למצוא דוגמא לכך. למרות זאת, ניתן להראות כי (2) לא גורר את (1) אפילו עבור אלגבראות ממימד סופי מעל שדה (ראה דוגמא 2.9.7).

[4] ישנה הנחה נוספת שנדרשת ע"מ ששתי התוצאות האחרונות תהיינה תקפות: כל שקילות מוריטה בין R ל-R^{op} משרה אוטומורפיזם של המרכז (center) של R. אוטומורפיזם זה צריך להיות העתקת הזהות.

תכונות יסודיות של תבניות בילינאריות

תוצאה נוספת של המחקר על הקשר בין תבניות בילינאריות ואנטי-אנדומורפיזמים הייתה ההכרה בכך שאי-נוון מימין לא גורר יציבות מימין וגם לא להיפך. תופעה זו, שאינה אפשרית עבור תבניות קלאסיות מעל חוגים עם חילוק, הובילה אותי לשקול מחדש את יסודות התיאוריה של תבניות כלליות. זהו הנושא של פרק 2. הבה נציב שאלה מפורשת: יהי (M,b,K) מרחב בילינארי מעל חוג R. אזי ניתן לשקול את התכונות הבאות:

(R1) b היא לא-מנוונת מימין (כלומר, Ad_b^r היא חח"ע)

(R2) b היא על מימין (right surjective; כלומר, Ad_b^r היא על).

(R3) b יציבה מימין.

הגרסאות השמאליות של תכונות אלו תסומנה ב-(L1),(L2),(L3). השאלה היא מהן הגרירות הלוגיות בין תתי קבוצות של (R1)-(R3), (L1)-(L3). לדוגמא, ראינו למעלה ש-(R1)∧(R2)⇐(R3) (ובמילים: "רגולרי מימין" גורר "יציב מימין"). חרף זאת, מסתבר שכל אחת מהתכונות (R1)-(R3), (L1)-(L3) אינה גוררת אף אחת מהאחרות (בניגוד חד לתבניות קלאסיות מעל שדות, שם כל התכונות שקולות זו לזו!). יותר מכך, ניתן להראות כי כל גרירה לוגית בין שתי תתי קבוצות של שש התכונות האלה ניתנת להסברה ע"י (R1)∧(R2)⇐(R3) והאנלוג השמאלי של פסוק זה.

המצב מסתבך כאשר מניחים של-K יש אנטי-איזומורפיזם או אינבולוציה κ. הנחה תמימה זו גורמת לגרירות נוספות להופיע, כגון (R1)∧(R2)⇐(L1). יתיר על כן, במקרה זה ניתן להוסיף לרשימת התכונות תכונה נוספת (יחד עם האנלוג השמאלי שלה):

(R4) קיימת ל-b κ-א-סימטריה ימנית (right κ-asymmetry) יחידה.

כאן, κ-א-סימטריה ימנית מוגדרת להיות העתקה $\lambda: M\to M$ המקיימת $b(x,y)^\kappa=b(y,\lambda x)$. (האנלוג השמאלי של (R4) יסומן ב-(L4)).

בסופו של דבר, הצלחתי להוכיח רשימת גרירות בין תתי קבוצות של התכונות (R1)-(R4), (L1)-(L4) ואני משער שרשימה זו מסבירה את כל הגרירות האחרות. מה שמונע ממני להכריז זאת הוא היעדרן של מספר דוגמאות נגדיות (למשל, חסרה דוגמא ש-(R2)∧(R4) לא גורר את (L3)). יש לציין שחלק מהדוגמאות הנגדיות לגרירות שכן נמצאו מערבות בניות קשות למדי. הדוגמה המרשימה ביותר (והקשה ביותר) מביניהן היא של תבנית בילינארית רגולרית מימין, בעלת κ-א-סימטרה ימנית יחידה, אך ללא κ-א-סימטריה שמאלית! (תבנית כזו אינה יכולה להיות רגולרית משמאל. בנוסף הא-סימטריה הימנית בהכרח אינה הפיכה).

תתי-חוגים יציבים למחצה

הבה נזכר בחוג W_b שהוגר לעיל. עבור מרחב בילינארי יציב מימין (M,b,K) עם אנטי-אוטומורפיזם מתאים $*$, הוא הוגדר להיות $\{\sigma\in\mathrm{End}_R(M)\,|\sigma^{**}=\sigma\}$. חקר המבנה של W_b הכרחי על מנת להסיק תוצאות על b ולכן הקדשתי כחצי שנה מהדוקטורט שלי ללמוד חוג זה בלבד. המחקר הוביל לגילויו של מונח הנקרא תת-חוג יציב למחצה (semi-invariant subring) ולתיאוריה חדשה עם שימושים רבים (ראה פרק 1).

תת חוג R_0 של חוג R נקרא יציב למחצה אם קיים חוג S המכיל את R וקבוצת אנדומורפיזמים (של חוגים) $\Sigma\subseteq\mathrm{End}(S)$ כך ש-$R_0=R^\Sigma:=\{r\in R\mid\sigma(r)=r\ \ \forall\sigma\in\Sigma\}$. תת חוג T-יציב למחצה (T-semi-invariant) מוגדר באותו אופן, אך R,S נדרשים להיות חוגים טופולוגיים לינאריים האוסדורפיים (Hausdorff linearly topologized rings) ואברי Σ נדרשים להיות רציפים. אם אפשר לבחור $S=R$, אז מתקבלת ההגדרה הרגילה של תת-חוג יציב (או אינווריאנטי). (לדוגמא, W_b הוא תת-חוג יציב של $\mathrm{End}_R(M)$ ביחס לקבוצה $\Sigma=\{**\}$). אין זה ברור מההגדרה, אך תתי-חוגים

יציבים למחצה נפוצים מאוד. לדוגמא, המרכז (centralizer) של כל תת קבוצה של R הוא תת-חוג (T-)יציב למחצה. בנוסף, אם M הוא מודול מיוצג סופית, אז $\mathrm{End}_R(M)$ הוא מנה של תת חוג-יציב למחצה של $M_n(R)\times M_m(R)$ עבור n,m מסויימים.

תכונות מסויימות עוברות לתתי-חוגים (T-)יציבים למחצה. מספר תכונות כאלה מופיעות במשפטים הבאים.

משפט 0.16: יהי R חוג. אם R הוא פרימרי למחצה (semiprimary) (מושלם מימין (right perfect)), אז כך גם כל תת-חוג יציב למחצה של R.

משפט 0.17: יהי R חוג טופולוגי לינארי האוסדורפי. אם R הוא מושלם למחצה (semiperfect) ועל-פרימרי-למחצה (על-מושלם-מימין), אז כך גם כל תת-חוג T-יציב למחצה של R.

לגבי משמעות המונחים על-פרימרי-למחצה (pro-semiprimary) ועל-מושלם-מימין (pro-right-perfect), אני קורא לחוג טופולוגי על-P (pro-P) אם הוא איזומורפי כחוג טופולוגי לגבול הפוך של חוגים טופולוגיים דיסקרטיים המקיימים את התכונה P.

חוץ מהשימושים לתבניות בילינאריות, למשפטים 0.16-0.17 ישנם שימושים נוספים, בעיקר לחוגים מושלמים למחצה ולפירוקי קרול-שמידט (Krull-Schmidt decompositions)., ביניהם :

(1) יהי R חוג מושלם למחצה ועל-פרימרי-למחצה,[5] אזי קיים פירוק קרול-שמידט לכל R-מודול מיוצג סופית (זה מכליל את [**92**, חלק 6], [**19**], [**78**], [**79**]). אם בנוסף R נות׳רי מימין, אז חוג האנדומורפיזמים של כל מודול מיוצג סופית הוא מושלם למחצה ועל-פרימרי-למחצה.

(2) יהי S חוג חילופי מושלם למחצה ועל-פרימרי-למחצה. אזי כל S-אלגברה R עבורה המודול R_S הוא מיוצג סופית היא מושלמת למחצה. אם בנוסף S נות׳רית, אז גם R גם על-פרימרית-למחצה.

(3) לכל הצגה של מונויד (monoid) על מודול עם חוג אנדומורפיזמים מושלם למחצה ועל-פרימרי-למחצה קיים פירוק קרול-שמידט.

עבודה זו מתוארת בפירוט במאמר שהתקבל לפרסום [**39**].

קטגוריות עם דואליות כפולה

לפני שנחתום את המבוא, הבה נחזור לקטגוריות הרמיטיות (הקרויות גם קטגוריות עם דואליות). קטגוריה הרמיטית היא שלשה $(\mathcal{H},*,\omega)$ כך ש-$\mathcal{H}$ היא קטגוריה (לרוב חיבורית (additive)), $*:\mathcal{H}\to\mathcal{H}$ הוא פונקטור קונטרווריאנטי (contravariant functor) ו-$\omega: id_{\mathcal{H}}\to **$ הוא איזומורפיזם טבעי המקיים זהות מסויימת (ראה [**71**], [**86**, פרק 7] או חלק 4.2 בהמשך). תבנית בילינארית מעל $\mathcal{H}$ היא זוג (M,b) כך ש-$M\in\mathcal{H}$ ו-$b\in\mathrm{Hom}_{\mathcal{H}}(M,M^*)$. תבניות בילינאריות קלאסיות ניתנות להבנה כתבניות בילינאריות מעל קטגוריה הרמיטית מתאימה, אך בנייה סטדנרטית זו אינה מתאימה לתבניות כלליות (ראה חלק 2.7 להסבר עמוק יותר). במקום זאת, תבניות בילינאריות כלליות ניתנות להבנה כתבניות מעל *קטגוריה עם דואליות כפולה* (category with a double duality). קטגוריה עם דואליות כפולה היא חמישייה $(\mathcal{A},[0],[1],\Phi,\Psi)$ כך ש-$\mathcal{A}$ היא קטגוריה (לרוב חיבורית), $[0],[1]:\mathcal{A}\to\mathcal{A}$ הם פונקטורים קונטרווריאנטיים (הנכתבים מעריכית) ו-$\Phi: id_{\mathcal{A}}\to[1][0]$, $\Psi: id_{\mathcal{A}}\to[0][1]$ הן העתקות טבעיות המקיימות זהויות מסויימות. תבנית בילינארית מעל $\mathcal{A}$ היא זוג (M,b) כך ש-$b\in\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(M,M^{[1]})$. חוסר הסימטריה בהגדרה הוא למראית עין בלבד, שכן ההנחות על Φ ו-Ψ גוררות שקיים איזומורפיזם טבעי $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(M,M^{[0]})\cong \mathrm{Ho}_{,\mathcal{A}}(M,M^{[1]})$.

[5] ובאופן כללי יותר, חוג קוואזי-π_∞-רגולרי ומושלם למחצה (ראה חלק 1.5).

דוגמא 0.18: (1) יהי R חוג ויהי K R-מודול כפול. לכל R-מודול ימני M ולכל $i \in \{0,1\}$ נגדיר $M^{[i]} := \mathrm{Hom}_R(M, K_{1-i})$ (זכרו כי K_{1-i} מציין את ה-R-מודול הימני המתקבל מ-K ע״י הפעולה $\odot_{1-i}$). אזי $M^{[i]}$ הוא R-מודול ימני ביחס לפעולה $(f \cdot r)m = (fm) \odot_i r$ (באשר $f \in M^{[i]}$, $r \in R$ ו-$m \in M$). כעת נגדיר $\Phi_M: M \to M^{[1][0]}$ ו-$\Psi: M \to M^{[0][1]}$ ע״י $(\Phi_M x)f = f(x)$ ו-$(\Psi_M x)g = g(x)$ לכל $x \in M$, $f \in M^{[1]}$, $g \in M^{[0]}$. אזי, $(\mathcal{M}_R, [0], [1], \Phi, \Psi)$ היא קטגוריה עם דואליות כפולה (באשר $\mathcal{M}_R$ מציינת את קטגוריית המודולים הימניים מעל R).
(2) $(\mathcal{H}, *, \omega)$ היא קטגוריה הרמיטית אס״ם $(\mathcal{H}, *, *, \omega, \omega)$ היא קטגוריה עם דואליות כפולה ו-ω הוא איזומורפיזם טבעי (ולא רק העתקה טבעית).

אחת התוצאות העמוקות (והקשות) ביותר של עבודה זו היא המשפט הבא:

משפט 0.19: תהי $(\mathcal{A}, [0], [1], \Phi, \Psi)$ קטגוריה עם דואליות כפולה. אזי קיימת קטגוריה הרמיטית $(\mathcal{H}, *, \omega)$ כך שקטגוריית התבניות הבילינאריות מעל $\mathcal{A}$ שקולה לקטגוריית התבניות הבילינאריות *הסימטריות הרגולריות* מעל $\mathcal{H}$. הקטגוריה $\mathcal{H}$ היא הקטגוריה של *מודולי קרונקר* (Kronecker Modules) מעל $\mathcal{A}$.

המשמעות של משפט 0.19 היא שהתורה של תבניות בילינאריות מעל קטגוריה עם דואליות כפולה נתונה שקולה לתורה של התבניות הבילינאריות הסימטריות הרגולריות מעל קטגוריה הרמיטית אחרת (ראה חלקים 4.3-4.5 לדיון מעמיק). יותר מכך, משפט זה מסביר מדוע בכלל ניתן לצפות שניתן לצמצם את התיאוריה של תבניות לא סימטריות לזו של הסימטריות. למעשה, הטענות (א)-(ה) לעיל, כמו גם התוצאות של ריהם (Riehm) ודומיו, ניתנות לתיאור כמקרה מיוחד של השקילות של משפט 0.19.

עלי להעיר כאן כי תוצאה בעלת גוון דומה הוצגה ע״י א. בייר-פלוקיגר (E. Bayer-Fluckiger) ול. פיינסילבר (L. Fainsilber) ב-[**16**]. ע״י שימוש בבנייה שונה, הן הוכיחו כי קטגוריית התבניות *הסימטריות* מעל קטגוריה הרמיטית נתונה שקולה לקטגוריית התבניות *הסימטריות הרגולריות* מעל קטגוריה הרמיטית אחרת. בנוסף, מספר ימים לפני כתיבת מילים אלו נתקלתי בעבודת הדוקטורט של ד. מולדובן (D. Moldovan; [**64**]), שהוגשה השנה (ועוד לא פורסמה). מולדובן הוכיח את משפט 0.19 לקטגוריות הרמיטיות והשתמש בו למגוון שימושים ובפרט כדי להראות מקרים מיוחדים של (א), (ב) ו-(ג) לעיל. (לדוגמא, הוא הוכיח את משפט הצמצום של וויט למערכות של תבניות בילינאריות מעל אלגבראות מטיפוס סופי מעל חוגי הערכה דיסקרטית שלמים). גם [**16**] וגם [**64**] דורשים כי כל האובייקטים (objects) בקטגורייה ההרמיטית הנתונה יהיו רפלקסיביים (דהיינו $\omega: id_{\mathcal{H}} \to **$ נדרש להיות *איזומורפיזם* טבעי ולא רק *העתקה* טבעית). הנחה זו אינה נחוצה עבור משפט 0.19. *(הערה: בסופו של דבר, א. בייר-פלוקיגר, ד. מולדובן ואני אחדנו את התוצאות שלנו ופרסמנו אותן כעבודה משותפת; ראה [**11**].)*

עוד אציין כי ניתן להשתמש במשפט 0.19 גם למערכות של תבניות בילינאריות. ראה חלק 4.5.