

תקציר מספר 7

יצוג מספרים ממשיים

יצוג מספרים ממשיים - תאוריה

היצוג של מספרים ממשיים במחשב מזכיר את מה שקרוי כתיבה "מדעית" של מספרים:

בשימושים פיזיקליים ומדעיים אחרים אנחנו נוטים לכתוב מספר בצורה כמו

$$-5.71325 \cdot 10^{13}$$

שמשמעותו למעשה

$$(-1) \cdot (5 \cdot 10^0 + 7 \cdot 10^{-1} + 1 \cdot 10^{-2} + 3 \cdot 10^{-3} + 2 \cdot 10^{-4}) \cdot 10^{13}$$

כלומר הוא מורכב למעשה משלושה חלקים: סימן, ערך המיוצג בצורה מנורמלת (בין 1.0 ל- 9.9999...) וסדר גודל (חזקה של 10).

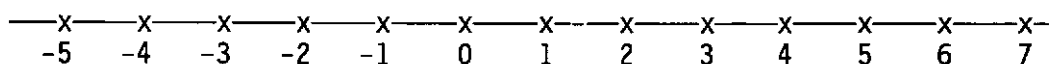
בחומרת מחשב המספרים הממשיים מיוצגים באופן עקרוני באותה צורה, אבל בבינארי במקום בדצימל. היצוגים של מספרים בחומרת המחשב (שלמים וממשיים) הם בגדלים קבועים מראש. במידה ורוצים ליצג מספרים בגודל רצוי או שרירותי יש לעשות זאת בתוכנה.

לפיכך "מספר ממשי" במחשב הוא למעשה שבר עם מספר סופי של ספרות משמעותיות + הכפלה בגורם הקובע סדר גודל + סימן.

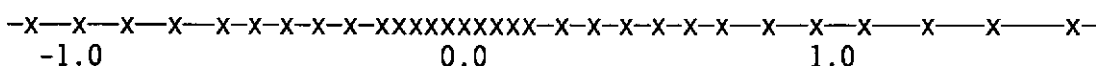
כאן אנחנו כבר יכולים לעמוד על הבדל בין היצוג של מספרים שלמים לבין היצוג של מספרים ממשיים:

בעוד מספרים שלמים המיוצגים במחשב נמצאים במרווחים שווים על הציר הממשי בין מקסימום למינימום (+32767 -- -32768 במקרה של מספרים 16 ביט עם סימן), זה אינו נכון עבור מספרים ממשיים. קבוצת המספרים הממשיים המיוצגים בחומרת המחשב נעשים צפופים יותר ככל שמתקרבים ל-0.0. בערך מחצית מכל המספרים נמצאים בין +1.0 ל-1.0. ככל שמתרחקים מ-0.0 המרווחים ביניהם הולכים וגדלים.

שלמים



ממשיים



יצוג מספרים בפועל

מספר ממשי מיוצג בחומרת המחשב בצורה:

א. יצוג מיוחד לאפס: כל הביטים אפס (0000000...0008).

ב. כל מספר שונה מאפס בצורה:

SIGN	EXPONENT	SIGNIFICAND
------	----------	-------------

כאשר

SIGN - ביט סימן (0 חיובי, 1 שלילי)

EXPONENT - מספר שלם שהוא חזקה של 2

SIGNIFICAND - סידרה של ספרות בינאריות המיצג מספר ממשי מנורמל (בין 1.0 ל-1.9999...99). לפעמים עם ה-1.0 המוביל ולפעמים לא.

הערך של המספר הוא

$$(-1)^{\text{SIGN}} * (1.0 + \text{SIGNIFICAND}[k] * 2^{-k}) * 2^{\text{EXPONENT}}$$

דוגמא:

את המספר 1.625 ניתן ליצג:

$$1.625 = 1.0 + 1 * 2^{-1} + 0 * 2^{-2} + 1 * 2^{-3} = 1.0 + 0.5 + 0 + 0.125$$

לפיכך

$$\text{SIGN} = 0$$

$$\text{EXPONENT} = 0$$

$$\text{SIGNIFICAND} (1.0 \text{ ללא יצוג ל-}) = 1010000...0$$

היצוג הזה הוא היצוג התאורטי.

בפועל עדיין חסרים מספר פרטים: כמה ביטים מוקצה ל-EXPONENT ול-
SIGNIFICAND, האם ה-1.0 מיוצג ואיך מיוצג ה-EXPONENT.

2. יצוג מספרים ממשיים ב-PC.

ב-PC המספרים הממשיים מיוצגים לפי הסטנדרד של ה-IEEE משנת 80:

א. גודל המספרים הממשיים הינם 32 ביט, 64 ביט, ו-80 ביט.
יצוג 32 ביט הוא ה-float של C, ובאופן כללי יותר נקרא דיוק רגיל או
דיוק יחיד Single Percision.
יצוג 64 ביט הוא ה-double של C, ובאופן כללי יותר נקרא דיוק כפול
double persion.
יצוג 80 ביט הוא ה-long double או באופן כללי יותר נקרא דיוק
מורחב Extended Percision.

ב. חלוקת הביטים לכל האורך הוא כלהלן:

32 ביט: 1 ביט ל-SIGN, 8 ביט ל-EXPONENT, 23 ביט ל-SIGNIFICAND.

64 ביט: 1 ביט ל-SIGN, 11 ביט ל-EXPONENT, 52 ביט ל-
SIGNIFICAND.

80 ביט: 1 ביט ל-SIGN, 15 ביט ל-EXPONENT, 64 ביט ל-
SIGNIFICAND.

מנקודת ראות של דיוק בספרות עשרוניות, משתנים בדיוק רגיל (32
ביט) מישמים דיוק של 7 - 6 ספרות עשרוניות, דיוק כפול מישמים דיוק של
16 - 15 ספרות עשרוניות, דיוק מורחב (80 ביט) מישמים דיוק של 19 - 18
ספרות עשרוניות. איך מחשבים את הדיוק הזה נראה בהמשך.

ג. ה-1.0 אינו מיוצג ב-32 ביט וה-64 ביט, אבל מיוצג ב-80 ביט.

ד. היצוג של ה-EXPONENT ע"י מספר שלם חיובי עם הטיה (BIAS).

ערך ה-BIAS תלוי באורך המספר:

127 עבור 32 ביט.

1023 עבור 64 ביט.

16383 עבור 80 ביט.

אגב, הערכים הקיצוניים של ה-EXPONENT אינם בשימוש על מנת לאפשר

יצוג של אינסוף (infinity), לא מספר (Not a Number - NaN), ושרה ללא ערך (Empty).

ה-EXPONENT עבור 32 ביט הוא בין 127 ל-126 ולא בין 128 ל-127-
כפי שאפשר היה לעשות. כמו כן ה-EXPONENT של 64 ביט הוא בין 1023 ל-
1022- (ולא בין 1024 ל-1023-), ה-EXPONENT של 80 ביט הוא בין 16383 ל-
16382- (ולא בין 16384 ל-16383-).

לפיכך שלושת האפשרויות של יצוג מספרים ממשיים הם:

Single Percision (float)

SIGN(1b)	EXPONENT (8b)	SIGNIFICAND (23b)
31	30	23 22 0

Double Percision (double)

SIGN(1b)	EXPONENT (11b)	SIGNIFICAND (52b)
63	62	52 51 0

Extended Percision (long double)

SIGN(1b)	EXPONENT (15b)	1	SIGNIFICAND (63b)
79	78	64 63 62	0

תחומים:

טווח הערכים החיוביים (ערך מוחלט) שניתן ליצג ביצוג המספרים במחשב הינו:

32 ביט:

החזקות של 2 הם בין -126 ל- $+127$.
לפיכך הערכים הם בתחום:

$$\begin{aligned} 1.0 * 2^{-126} &= 1.175 * 10^{-38} && \text{בין} \\ 1.9999... * 2^{127} &= 3.4 * 10^{38} && \text{לבין} \end{aligned}$$

בצורה דומה עבור 64 ביט החזקות של 2 הם בין -1022 לבין $+1023$ והערכים הם:

$$\begin{aligned} 1.0 * 2^{-1022} &= 2.225 * 10^{-308} && \text{בין} \\ 1.9999... * 2^{1023} &= 1.798 * 10^{308} && \text{לבין} \end{aligned}$$

ובצורה דומה עבור 80 ביט החזקות של 2 הם בין -16382 לבין $+16383$ והערכים הם:

$$\begin{aligned} 1.0 * 2^{-16382} &= 3.362 * 10^{-4932} && \text{בין} \\ 1.9999... * 2^{16383} &= 1.189 * 10^{4932} && \text{לבין} \end{aligned}$$

חישוב דיוק

באופן כללי, אם ביצוג מספר ממשי יש ב-SIGNIFICAND M ביטים משמעותיים, אזי הדיוק של ה-SIGNIFICAND הוא פשוט 2^{-M} .

בכדי להבין מדוע, אולי קל יותר לחשוב במושגים עשרוניים. לכל מספר ממשי בישר הממשי R יש יצוג עשרוני מנורמל (שעשוי להיות אינסופי). אם נניח שאנחנו קוטעים את היצוג של ה-SIGNIFICAND של מספר אחרי 3 ספרות אחרי הנקודה העשרונית, אוברדן הדיוק של ה-SIGNIFICAND חסום ע"י $0.00099999\dots$ או בעצם כמעט 0.001 או 10^{-3} .

המקרה הבינארי באופן עקרוני אותו דבר. ההבדלים הם ש-2 מחליף את 10 בחזקה, וכל הביטים מיצגים דיוק שמאחורי הנקודה הבינארית (המקדם הוא תמיד 1.0 ולא מיוצג במפורש).

לפיכך הדיוק של ה-SIGNIFICAND בדיוק רגיל (23 מתוך 32) הוא 2^{-23} .
 1.19×10^{-7} משמעות הדבר שעם אנחנו מבצעים פעולה אחת על שני מספרים המיוצגים באופן מדויק (נניח חילוק של שני שלמים), אפשר יהיה לסמוך על 6 הספרות העשרוניות הראשונות של התוצאה, אבל לא על השביעי.

בצורה דומה הדיוק של ה-SIGNIFICAND בדיוק כפול הוא $2^{-52} = 2.22 \times 10^{-16}$.

הדיוק של ה-SIGNIFICAND בדיוק מורחב הוא $2^{-63} = 1.08 \times 10^{-19}$.

דוגמאות למספרים ממשיים ויצוגם:

הערך 1.625 מיוצג כ-

32 ביט: 3FD00000h או

SIGNIFICAND = 101b

0011 1111 1101 0000 0000 0000 0000 0000b

127 = EXPONENT

64 ביט: 3FFA000000000000h או

SIGNIFICAND = 101b

0011 1111 1111 1010 0000 0000 0000 0000 0000 0000 0000 0000 0000 0000b

1023 = EXPONENT

80 ביט: 3FFFD000000000000000h או

SIGNIFICAND = 1101b

0011 1111 1111 1111 1101 0000 0000 0000 0000

16383 = EXPONENT

דוגמא:

הערך - $-1.25 = -(1.0 + 0 \cdot 0.5 + 1 \cdot 0.25)$ מיוצג כ-

SIGNIFICAND = 01b ללא יצוג ה-1.0.

היצוג 32 ביט יהיה BFA00000h

SIGNIFICAND = 01b

שלילי

1011 1111 1010 0000 0000 0000 0000 0000b

127 = EXPONENT

64 ביט: BFF400000000000h או

שלי לי
SIGNIFICAND = 01b

1011 1111 1111 0100 0000 0000 0000 0000 0000 0000 0000 0000 0000 0000h

1023 = EXPONENT

80 ביט: BFFFA0000000000000000h או

שלי לי
SIGNIFICAND = 101b

1011 1111 1111 1111 1010 0000 0000 0000 0000

16383 = EXPONENT

דוגמא:

יצוג הערך 0.625:

$$.0.625 = 1.25 * 2^{-1} = (1.0 + 0*0.5 + 1*0.25) * 2^{-1}$$

לפיכך ה-EXPONENT (ללא ה-BIAS) הוא -1. עם ה-BIAS ה-EXPONENT יהיה:
 $-1 + 127 = 126$, עבור 32 ביט,
 $-1 + 1023 = 1022$, עבור 64 ביט,
 $-1 + 16383 = 16382$, עבור 80 ביט.

ה-SIGNIFICAND התאורטי (ללא יצוג 1.0) שזה (כמו בדוגמא הקודמת) ל-01b.

היצוג 32 ביט יהיה 3F200000h

SIGNIFICAND = 01b

0011 1111 0010 0000 0000 0000 0000 0000b

126 = EXPONENT

64 ביט: 3FE4000000000000h או

SIGNIFICAND = 01b

0011 1111 1110 0100 0000 0000 0000 0000 0000 0000 0000 0000 0000h

1022 = EXPONENT

80 ביט: 3FFFA0000000000000000h או

SIGNIFICAND = 101b

0011 1111 1111 1110 1010 0000 0000 0000 0000

16382 = EXPONENT

דוגמא:

יצוג הערך 576.0:

$$576.0 = 1.125 \cdot 512 = 1.125 \cdot 2^9$$

$$\text{כאשר } 1.125 = 1.0 + 0 \cdot 0.5 + 0 \cdot 0.25 + 1 \cdot 0.125$$

לפיכך ה-EXPONENT (ללא ה-BIAS) הוא 9. עם ה-BIAS ה-EXPONENT יהיה:

$$127 + 9 = 136 \text{ עבור 32 ביט,}$$

$$1023 + 9 = 1032 \text{ עבור 64 ביט,}$$

$$16383 + 9 = 16392 \text{ עבור 80 ביט.}$$

ה-SIGNIFICAND התאורטי (ללא יצוג 1.0) הוא 001b.

היצוג 32 ביט יהיה 44100000h

$$\text{SIGNIFICAND} = 001b$$

$$\begin{array}{r} \text{-----} \\ 0100 \ 0100 \ 0001 \ 0000 \ 0000 \ 0000 \ 0000 \ 0000b \\ \text{-----} \end{array}$$

$$136 = \text{EXPONENT}$$

64 ביט: 4082000000000000h או

$$\text{SIGNIFICAND} = 001b$$

$$\begin{array}{r} \text{-----} \\ 0100 \ 0000 \ 1000 \ 0010 \ 0000 \ 0000 \ 0000 \ 0000 \ 0000 \ 0000 \ 0000 \ 0000b \\ \text{-----} \end{array}$$

$$1032 = \text{EXPONENT}$$

80 ביט: 40089000000000000000h או

$$\text{SIGNIFICAND} = 1001b$$

$$\begin{array}{r} \text{-----} \\ 0100 \ 0000 \ 0000 \ 1000 \ 1001 \ 0000 \ 0000 \ \dots\dots\dots 0000 \ 0000 \\ \text{-----} \end{array}$$

$$16392 = \text{EXPONENT}$$

דוגמא:

דוגמא ליצוג בינארי לא סופי

נבדוק את היצוג של המספר התמים 1.4:

$$0.4 < 0.5 \text{ לפיכך}$$

$$1.375 = 1.0 + 1 \cdot 0.25 + 1 \cdot 0.125 + 0 \cdot 0.5 \text{ זה עדיין } > 1.4$$

$$0.0625 = 2^{-4} = 1.375 + 0.0625 = 1.4375 \text{ זה יותר מדי.}$$

$$0.03125 = 2^{-5} = 1.375 + 0.03125 = 1.40625 \text{ זה עדיין יותר מדי.}$$

$2^{-6} = 0.015625$ קרוב יותר אבל
 עדיין לא מספיק. אבל התקרבו ל-1.4 עד כדי $1.4 - 1.390625 = 0.009375$.

אפשר להגיד שה-SIGNIFICAND 011001b המקביל ל-

$$1.0 + 0 \cdot 0.5 + 1 \cdot 0.25 + 1 \cdot 0.125 + 0 \cdot 0.0625 + 0 \cdot 0.03125 + 1 \cdot 0.015625 = 1.390625$$

מיצג את 1.4 בדיוק של 6 ספרות בינאריות.

אפשר להמשיך כך ... לעולמים. למרות של-1.4 יש יצוג עשרוני סופי, אין לו יצוג בינארי סופי! לא לכל מספר שיש לו יצוג עשרוני סופי, יש יצוג בינארי סופי. למעשה רוב המספרים שיש להם יצוג עשרוני סופי אינם כאלו!

זה למעשה אינו חדש. גם ביצוג העשרוני אין דיוק סופי למספרים כמו $2/7$ או $1/3$. שלא לדבר על מספרים כמו e או π . תמיד פעולות על מספרים ממשיים הם עד דיוק כזה או אחר.

לסיכום הנושא הזה היצוג של 1.4 הוא:

32 ביט: 3FB33333h או

```

SIGNIFICAND = 011001.....b
-----
0011 1111 1011 0011 0011 0011 0011 0011b
-----
127 = EXPONENT
  
```

64 ביט: 3FF6666666666666h או

```

SIGNIFICAND = 011001.....b
-----
0011 1111 1111 0110 0110 0110 0110 0110 0110 0110 0110 0110 0110h
-----
1023 = EXPONENT
  
```

80 ביט: 3FFFB3333333333333333333h או

```

SIGNIFICAND = 1011001.....b
-----
0011 1111 1111 1111 1011 0011 0011 ..... 0011 0011
-----
16383 = EXPONENT
  
```

יצירת דוגמאות נוספות:

אם ברצונך לדעת איך מספר ממשי כלשהוא מיוצג (מבלי לחשב זאת בעצמך) דרך פשוטה לעשות זאת הוא להגדיר בתוכנית אסמבלר כלשהוא (נניח myprog.asm):

```
A1 DD 1.625
AA1 DQ 1.625
AAA1 DT 1.625
```

ובצע tasm /la myprog.asm של הקובץ.
יווצר לכך קובץ myprog.lst, שבתוכו תראה (דרך תוכנית עריכה):

```
6 0000                                .DATA
7 0000 3FD00000                      A1 DD 1.625
8 0004 3FFA000000000000             AA1 DQ 1.625
9 000C 3FFFD0000000000000000000    AAA1 DT 1.625
```

/\

היצוג הבינארי (בהקסה) נמצא כאן