**אנליזה נומרית**

**אנליזה נומרית** היא תחום של מתמטיקה שימושית העוסק בחקר **אלגוריתמים** של **חישובים מספריים**. התרגום המילולי של המושג אנליזה נומרית הינה **ניתוח מספרי**. על פי רוב, אנליזה נומרית מסתמכת על תורות של **מתמטיקה רציפה** כמו חשבון אינפיטיסמלי, גאומטריה, פונקציות ממשיות ומורכבות וכו'.

אחד התרומות החשובות של אנליזה נומרית הינה למצוא **מענה מעשי** (גם אם לא תמיד לחלוטין אמין) עבור **בעיות קשות** שאין או לא ידוע פתרון תאורטי (כמו למשל פתרון משוואות לא לינאריות).

תחומים קלאסיים של אנליזה נומרית הינם **חישובים של ערכי פונקציה אבסטרקטית בנקודה**,  **חקירת פונקציה על פי נקודות נתונות**,  **מציאת שורשים של משוואות לא לינאריות**, **מימוש קירובים לפונקציות שיקר מדי לחשב אותם במדויק**, **אלגברה לינארית נומרית, אינטגרציה נומרית**, **פתרון נומרי למשוואות דיפרנציאליות, אופטימיזציה וכו'**.

**רקע**

באופן גס אפשר לומר ש**מתמטיקה עיונית** מתרכזת בחקירת אמיתות מתמטיות גם כאשר מדובר בתחומים שהמוטיבציה שלהם הם שימושיים, מדעיים או הנדסיים. **מתמטיקה שימושית** עוסקת במימוש **פתרונות מעשיים** בתחומים הללו. הדבר יכול לבוא לידי ביטוי במספר צורות:

* גרסאות מעשיות לרעיונות אבסטרקטיים, כמו מימוש קירובים על ידי קטיעת תהליכים אינסופיים.
* שיטות המצליחות לפתור מקרים ספציפיים של בעיות שאין להם פתרון תאורטי או כוללני.

ניתן גם לחלק את המתמטיקה השימושית לשני סוגי תחומים: אלה שעוסקים באלמנטים **בדידים** הקרויים **מתמטיקה דיסקרטית** כמו תורת המספרים הטבעיים והשלמים, קומבינטוריקה, תורת הגרפים וכו'. לעומתם יש תחומים שקשורים ל**מתמטיקה רציפה** כמו חדו"א, פונקציות ממשיות וכו'.

**מאפינים של אנליזה נומרית**

הגם שבאנליזה נומרית משתמשים בכלים מתמטיים קלאסיים כמו הגדרות פורמליות, נוסחאות, הוכחות, וכו' היא בראש ובראשונה **תחום מעשי**. היא מכירה בפתרונות מסוגים שונים ובלבד שיהיה להם **משמעות מעשית**. בצד פתרונות מימוש של **פתרונות (או אלגוריתמים)ישירים או כלליים** כמו בחישוב פתרונות של משוואות לינאריות נוסח Ax = b אנליזה נומרית מכירה גם **פתרונות עקיפים או חלקיים**  הנקראים **פתרונות (או אלגוריתמים) איטרטיביים.** באופן עקרוני הפתרונות הללו מבוססות על רעיון של **שיפור חוזר ונשנה** של **קירוב לפתרון**. בדרך כלל מדובר בחישוב **סידרה** של נקודות {i=0, 1, 2 … |{xi (לעיתים במימד אחד ולעיתים ברב מימדי). חלק משמעותי מהפתרונות הללו תלויים בהצלחתם בהנחות מסוימות, כמו **תנאים מסוימים** ש**הבעיה העומדת לפתרון צריכה לקיים** או שהמשתמש צריך לספק **קירוב ראשוני מספיק טוב לפתרון**. כמו כן אפשר לומר שבדרך כלל אי אפשר לדעת מראש כמה חישובים יתבצעו, גם כאשר האלגוריתם יפתור את הבעיה.

למי שרגיל לאלגוריתמים במתמטיקה הדיסקרטית ה"פתרונות" הללו יראו די מאכזבים. אם נעשה אנלוגיה מיון מספרים למשל, זה יהיה כמו להציע פתרון שימין סידרה כזו "בהסתברות 98%", או ימין את הסידרה רק אם היא "פחות או יותר ממוינת ממילא", או שהאלגוריתם המוצא ימיין את הסדרה, אבל "אי אפשר לדעת כמה חישובים זה יקח". האמת היא שגם במתמטיקה הדיסקרטית יש לפעמים פתרונות דומים, אם כי הם נדירים הרבה יותר. למען האמת פתרונות איטראטיביים מיצגים דווקא יתרון מסוים שיש למתמטיקה הרציפה על פני זו הבדידה: **שאפשר** במתמטיקה רציפה לקרב פתרונות ולשפר אותם.

מאפיין נוסף של האנליזה הנומרית היא הצורך להביא בחשבון את נושא **הדיוק** או יותר נכון חוסר הדיוק של החישובים. למרות שיש כל מני אפשרויות בכל הקשור לשליטה בדיוק החישובים השורה התחתונה היא שבכל מסגרת מעשית, ביצוע חישובים ידנית או במחשב, דיוק החישובים יהיה סופי וכך גם מספר המספרים שניתן לייצג. לפיכך מה שלא נעשה, כמעט כל פעולה נומרית תהיה או יכולה להיות **קירוב בדיוק סופי**. על כך נרחיב את הדיבור בהמשך. בעיות חוסר של דיוק יכולים לנבוע ממקורות שונים:

- לעיתים קרובות (אולי ניתן לומר בדרך כלל) תוצאה של חישוב, כמו /2 = arccos(0)л לא ניתן ליייצוג נומרי מדויק. אפילו 2√ לא.

- תוצאה של מרבית החישובים, אפילו תוצאת חלוקה בין שני מספרים כמו 10.0/7.0, לא תהיה מדויקת. שגיאות מסוג זה נקראים שגיאות עיגול (round off error).

- לעיתים חישוב היא תוצאה של נוסחה אינסופית שעוצרים אותה בנקודה מסוימת (למשל חישוב sinx ע"י תור טיילור) והחישובים שלא נעשו, גם אם משמעותם הוא קטן הוא בכל זאת שגיאה. שגיאה מסוג זה נקרא truncation error.

בעיה דומה היא ה- discretization error שבו אנחנו מותרים על דיוק ע"י ייצוג גורם (פונקציה למשל) על ידי נקודות על מנת לחסוך חישובים.

- לעיתים אלגוריתמים טבעיים לפתרון בעיות מסוימות מבצעים חישובים חוזרים ונשנים על אותו נתון, דבר שלא היה בבחינת בעיה אילו החישוב היה מדויק אבל בפועל הוא לא, ואז הנתון, בשל ריבוי החישובים והצטברות שגיאות העיגול, שונה מהותית ממה שהוא אמור להיות. שגיאה מסוג זה נקרא propagation error. דוגמא לכך יכולה להיות אלגוריתם פשוט מדי לפתרון מערכת לינארית Ax=b.

* לעיתים הבעיה אותה אנחנו רוצים להתמודד איתה רגישה מאד לחוסר דיוק בחישובים או בייצוג. דוגמאות לכך הם מערכות לינאריות מסוימות או שורשים של פולינומים. לבעיה כזו נקרא ill formed או ill conditioned להבדיל מ-well formed או well conditioned.

ככלל באנליזה נומרית שואפים ל**יציבות נומרית** של פתרון או מציאות ככלל שבו חוסר הדיוק הבלתי נמנע אינו גדל בצורה בלתי קבילה במהלך החישוב.

**אנליזה נומרית ומחשבים**

האנליזה הנומרית קדמה למחשבים במאות שנים. חלק מן הרעיונות היו בשימוש על ידי מתמטיקאים קדמונים וחלק מן השיטות בשימוש היום הם על שמם של מתמטיקאים שקדמו למחשבים כמו ניוטון, לגראנז וטיילור. האנליזה הנומרית שימשה לחיבור לוחות ערכים שהקלו על חישובים ידניים, שיטה שבעקיפין ממומשים גם במחשבים של היום. יחד עם זאת הכניסה של מחשבים לתמונה הכניסה מימדים חדשים לתחום, כי עכשיו קל לממש חישובים מורכבים הרבה יותר.