סיפורו של המספר e

המספר e הוא מספר אי-רציונלי טרנסצנדנטי השווה בערך ל-2.71828182846. למספר e יש כמה סיפורים, בחרתי לכם את הסיפור של e כבסיס הלוגריתם הטבעי $\ln$. והנה נוהג להבין שמספר זה נקרא גם קבוע אוילר.

נתחיל את הסיפור מהנגזרת של הפונקציה המעריכית $f(x)=a^x$ $(0<a)$, נחשב נגזרת זו בהגדרת הנגזרת:

$$f'(x)=\lim_{x_0\to x}\frac{f(x)-f(x_0)}{x_0-x} \quad \text{או} \quad f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

נשתמש בהגדרה הימנית:

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^{x+\Delta x}-a^x}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}a^x\,\frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x}=a^x\lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x}$$

הגבול האחרון שקבלנו הוא הנגזרת של f בנקודה $x=0$. ולכן בשביל לחשב את הנגזרת של $f(x)$ מספיק לחשב את ערכה באפס. אבל חישוב הנגזרת של f באפס תלוי בבסיס החזקה a, ולכן הרעיון היה למצוא בסיס חזקה כך שערך הנגזרת של f באפס יהיה שווה ל-1. כי בזה נקבל פונקציה ממש יפה, הפונקציה שהנגזרת שלה שווה לה בכל נקודה ונקודה:

נמצא a כך ש- $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x}=1$

נתעלם לרגע מהגבול, ונפתור את המשוואה: $\frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x}=1$

פתרון המשוואה:

$$a^{\Delta x}-1=\Delta x$$
$$a^{\Delta x}=1+\Delta x$$
$$a=(1+\Delta x)^{\frac{1}{\Delta x}}$$

אז הקבוע a שווה לגבול $\lim_{\Delta x\to 0}(1+\Delta x)^{\frac{1}{\Delta x}}$.

בשביל לחשב גבול זה, נשתמש בכמה משפטים מנושא הסדרות:

נתבונן בסדרת המספרים : $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, $(n\in\mathbb{N})$.

בהוכחת התכנסות סדרה זו מבוסס על העובדה שסדרה מונוטונית וחסומה היא סדרה מתכנסת. לכן כל מה שצריך לעשות בשביל להוכיח התכנסות סדרה זו הוא להוכיח שהסדרה היא סדרה חסומה ומונוטונית :

נתחיל במונוטוניות :

נוכיח שהסדרה a_n מונוטונית עולה, כלומר צריך להוכיח שלכל n טבעי מתקיים $a_n \leq a_{n+1}$. לצורך זה, נשתמש באי-שוויון הממוצעים :

אי-שוויון הממוצעים : לכל n מספרים ממשיים חיוביים מתקיים :

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}} \leq \sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdots a_n} \leq \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$$

או בקיצור :

$$n:\sum_1^n a_k^{-1} \leq \left(\prod_1^n a_k\right)^{1/n} \leq \frac{1}{n}\sum_1^n a_k$$

או במילים ; מהממוצע ההרמוני $\leq$ הממוצע הגיאומטרי $\leq$ מהממוצע ההרמוני.

או בסימנים : $H_n \leq G_n \leq A_n$.

בהוכחת מונוטוניות הסדרה a_n, לא צריך את אי-השוויון השמאלי, נסתפק באי-השוויון $G_n \leq A_n$, או $G_{n+1} \leq A_{n+1}$

כמובן אי-שוויון זה מתקיים עבור כל $n+1$ חיוביים ממשיים, בפרט עבור המספרים :

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 1+\frac{1}{n} \quad , a_{n+1} = 1$$

כלומר ;

$$\left(\prod_1^{n+1} a_k\right)^{\frac{1}{n+1}} \leq A_{n+1} = \frac{1}{n+1}\sum_1^{n+1} a_k$$

או :

$$\sqrt[n+1]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot 1} \leq \frac{n\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)+1}{n+1}$$

נכפל :

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{n+1}} \leq \frac{1+n+1}{n+1}$$

סה"כ, לכל n טבעי מתקיים: $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} \le \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$, כלומר
לכל n טבעי $a_n \le a_{n+1}$.

כבר הוכחנו את המונוטוניות. נוכיח כעת ש-a_n חסומה:
דבר ראשון, מהמונוטוניות נובע ש- $a_1 \le a_n \; : \forall n$, כלומר a_n חסומה
מלמטה ע"י האיבר הראשון $a_1=2$. נוכיח חסימות מלמעלה, נשתמש שוב
באי-שוויון הממוצעים, עבור $n+100$ המספרים:

$$a_1=a_2=\dots=a_n=1+\frac{1}{n} \quad , \quad a_{n+1}=\dots=a_{n+100}=\frac{99}{100}$$

מתקיים:

$$G_{n+100} \le A_{n+100}$$

כלומר:

$$\sqrt[n+100]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\left(\frac{99}{100}\right)^{100}} \le \frac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)+100\cdot\frac{99}{100}}{n+100}$$

$$\sqrt[n+100]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\left(\frac{99}{100}\right)^{100}} \le \frac{n+1+99}{n+100}=1$$

ולכן:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} \le \left(\frac{100}{99}\right)^{100}$$

כלומר, לכל n טבעי מתקיים $a_n \le \left(\frac{100}{99}\right)^{100}$. ולכן a_n חסומה.

כבר הוכחנו שהסדרה $a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$ מתכנסת. אבל אנחנו עדיין לא חישבנו את
הגבול שלה, ולכן לא ראינו את הקשר בינה לבין הגבול שמבטא את ערך הנגזרת של
f באפס (שבו אנחנו מחפשים את הקבוע a ש"מ $f'(0)=1$).

נגלה את הקשר בין a_n ל- $f'(0)$: לצורך זה, אנחנו צריכים שלושה משפטים:

1. אם a_n מתכנסת לגבול L, אזי כל תת-סדרה (אינסופית) של a_n מתכנסת לאותו גבול L.
2. אם שתי סדרות d_n ו- b_n מתכנסות לאותו גבול L מקיימות החל מ-n_0 מסוים: $\forall n>n_0: b_n \le c_n \le d_n$, אזי c_n מתכנסת לאותו גבול L.
3. משפט היינה (נראה בהמשך).

המשפט הראשון אומר לנו בעצם, שלא רק הסדרה a_n מתכנסת לגבול L (שעדיין
לא חישבנו אותו), אלא גם כל סדרה $c_n=\left(1+\frac{1}{N_n}\right)^{N_n}$ (כאשר N_n היא סדרת מספרים
טבעיים עולה לאינסוף) מתכנסת לאותו גבול L. כי N_n היא תת-סדרה של הטבעיים,

ולכן C_n היא תת-סדרה של a_n, ולכן היא מתכנסת ל- L.
במשפט השני מסביר את הקשר בין a_n ל- $f'(0)$:

נתבונן בגבול $\lim\limits_{\Delta x\to 0}(1+\Delta x)^{\frac{1}{\Delta x}}$ ונכתוב אותו בצורה $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(1+\frac{1}{\frac{1}{\Delta x}}\right)^{\frac{1}{\Delta x}}$.

נחסום גבול זה ע"י שתי סדרות: $b_n=b_{\lfloor\frac{1}{\Delta x}\rfloor}=\left(1+\frac{1}{\lfloor 1/\Delta x\rfloor}\right)^{\lfloor\frac{1}{\Delta x}\rfloor}$; $d_n=d_{\lceil 1/\Delta x\rceil}=\left(1+\frac{1}{\lceil\frac{1}{\Delta x}\rceil}\right)^{\lceil 1/\Delta x\rceil}$

הסימונים $\lceil x\rceil,\lfloor x\rfloor$ משמעותם: הערך השלם התחתון של x, הערך השלם העליון של x, בהתאמה.

מהעובדה ש- $\lfloor x\rfloor\leqslant x\leqslant\lceil x\rceil$, בהנחה ש- $\lceil x\rceil,\lfloor x\rfloor\in\mathbb{N}$, ומהמונוטוניות של הסדרה a_n נקבל:

$$\left(1+\frac{1}{\lfloor x\rfloor}\right)^{\lfloor x\rfloor}\leqslant\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\leqslant\left(1+\frac{1}{\lceil x\rceil}\right)^{\lceil x\rceil}$$

נחליף את x ב- $\frac{1}{\Delta x}$ ונקבל: החל ממקום מסוים מתקיים:

$$b_n=\left(1+\frac{1}{\lfloor\frac{1}{\Delta x}\rfloor}\right)^{\lfloor\frac{1}{\Delta x}\rfloor}\leqslant(1+\Delta x)^{\frac{1}{\Delta x}}\leqslant\left(1+\frac{1}{\lceil\frac{1}{\Delta x}\rceil}\right)^{\lceil\frac{1}{\Delta x}\rceil}=d_n$$

כמובן שתי הסדרות b_n,d_n הן תת-סדרה של a_n ולכן הן מתכנסות לאותו גבול L שאליו a_n מתכנסת.
ומהמשפט השני נובע שלכל סדרה $c_n=(1+\Delta x)^{\frac{1}{\Delta x}}$ המתקבלת ממספלול לכל ערך שואף Δx לאפס, c_n מתכנסת ל- L. וכאן הדגש תורו של המשפט הבלתי (משפט היינה): $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=L$ אם"ם לכל סדרה a_n המתכנסת ל- x_0 מתקיים $\lim\limits_{n\to\infty}f(a_n)=L$.

משפט זה קובע שעבור $a=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ נקבל פונקציה מעריכית $f(x)=a^x$ שהנגזרת שלה שווה לה.

כעת נחשב את a, חישוב הגבול מתבצע בהצבות של מספרים גדולים בביטוי $a_n=(1+\frac{1}{n})^n$:

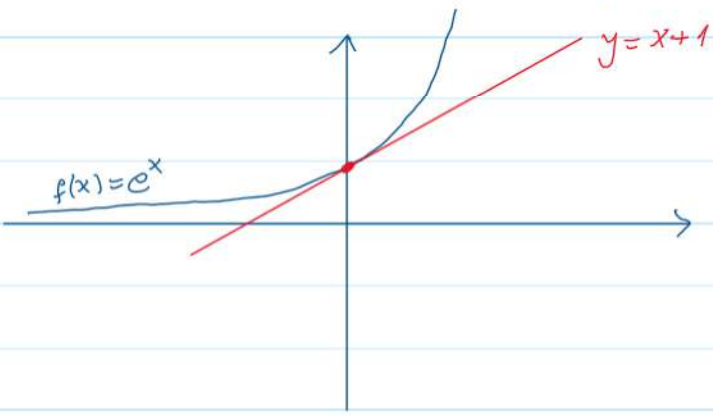
n	a_n
1	2
10	2.59374246
100	2.704813829
1000	2.716923932
10000	2.718145927
100000	2.718268237
1000000	2.718280469

מהמונוטוניות של a_n, אנחנו נקבל קירוב יותר טוב לקבוע a בכל פעם עולים גם ב-n

קבוע a זה, הוא הקבוע הידוע היום בשם e, והוא שווה בערך ל-

$$e = 2.718281828$$

עד כאן נוכל להגיד שהמספר e כבסיס של פונקציה מעריכית בשילוב $f(x)=e^x$ הוא מספר שמגדיר פונקציה השווה לנגזרת שלה. או במבט גיאומטרי, המספר e כבסיס של f קובע ישר משיק לגרף f בנקודה $(0,1)$ ששיפועו שווה 1 ($f'(0)=1$) :



אותו מבט גיאומטרי ניתן לראות בפונקציית הלוגריתם ההופכית של הפונקציה המעריכית : $g(x)=\log_a x$. גם הישר המשיק לגרף הפונקציה $g(x)$ בנקודת חיתוכה עם ציר ה-x, הנקודה $(1,0)$, שיפועו שווה ל-1. וזה גם מה שנותן נגזרת יפה של פונקציית הלוגריתם עם בסיס e. ובזה נקבל עוד הגדרה יפה של המספר e : המספר e הוא הבסיס של $g(x)=\log_a x$ שבו נקבל ישר משיק לגרף g בנקודה $(1,0)$ ששיפועו שווה 1 . שיפוע השווה למספר הטבעי הראשון, אז נקרא ללוגריתם המיוחד הזה לוגריתם טבעי Natural logarithm, ונסמנו ב- $g(x) = \ln x$.