

סיבובים ושיקופים במישור ובמרחב

בשורות הבאות נדבר ונציג מטריצות סיבוב ומטריצות שיקוף במישור $\mathbb{R}^2$ ובמרחב $\mathbb{R}^3$. נראה איך מגדירים מטריצות שיקוף ומטריצות סיבוב במישור ובמרחב, ואיך ניתן לדעת מהי זווית הסיבוב ומהו ציר הסיבוב של מטריצת סיבוב כלשהי. נתחיל במישור:

אופרטור הסיבוב במישור הוא אופרטור לינארי $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ המוגדר על-ידי $T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta x - \sin \theta y \\ \sin \theta x + \cos \theta y \end{pmatrix}$ כאשר θ היא זווית כלשהי בקטע $[0, 2\pi)$.

טענה 1

T הוא אופרטור סיבוב המסובב את המישור בזווית θ נגד כיוון השעון (כיוון חיובי).

הוכחה: יהי וקטור $v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, נניח שההצגה הקוטבית של v היא:

$$v = \begin{pmatrix} r \cos \alpha \\ r \sin \alpha \end{pmatrix}$$

ולכן:

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} r \cos \alpha \\ r \sin \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta r \cos \alpha - \sin \theta r \sin \alpha \\ \sin \theta r \cos \alpha + \cos \theta r \sin \alpha \end{pmatrix} \stackrel{(*)}{=} \begin{pmatrix} r \cos(\alpha + \theta) \\ r \sin(\alpha + \theta) \end{pmatrix}$$

וזהו בדיוק הוקטור המתקבל מ- v לאחר סיבוב בזווית θ בכיוון החיובי.

■

הערה: השוויון $(*)$ נובע מזהויות טריגונומטריות של קוסינוס וסינוס של סכום שתי זוויות.

המטריצה המייצגת את T לפי בסיס סטנדרטי היא:

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, 0 \leq \theta < 2\pi$$

מטריצה $R(\theta)$ נקראת מטריצת סיבוב (Rotation matrix), מטריצה $R(\theta)$ היא מטריצה אורתוגונלית והדטרמיננטה שלה שווה 1.

סיבוב בכיוון השעון (כיוון שלילי) בזווית θ מתקבל ע"י המטריצה ההופכית של $R(\theta)$:

$$(R(\theta))^{-1} = (R(\theta))^T = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} = R(-\theta)$$

כלומר, אם $0 \leq \theta < 2\pi$ אז $R(\theta)$ היא סיבוב בזווית θ בכיוון החיובי, ו- $R(-\theta)$ היא סיבוב בזווית $-\theta$ בכיוון החיובי או סיבוב בזווית θ בכיוון השלילי.

הערה: כל מטריצת סיבוב במישור היא מטריצה אורתוגונלית, אבל לא כל מטריצה אורתוגונלית היא מטריצת סיבוב.

טענה 2

אם A היא מטריצה אורתוגונלית במישור אז A שייכת לאחת משתי הקבוצות הבאות:

$$R(\theta) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \mid 0 \leq \theta < 2\pi \right\}$$

$$R'(\theta) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} \mid 0 \leq \theta < 2\pi \right\}$$

שימו לב:

$$\begin{aligned} R'(\theta) &= \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= R(\theta) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

המטריצה $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ היא שיקוף של המישור ביחס לציר $\hat{x}$, לכן המטריצה $R'(\theta)$ היא מטריצת שיקוף ביחס לציר $\hat{x}$ ולאחר מכן סיבוב בזווית θ בכיוון החיובי.

הוכחת טענה 2: תהי $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ מטריצה אורתוגונלית, אזי $\det A = \pm 1$, נתבונן בשני המקרים:

אם $\det A = 1$ ו- A אורתוגונלית: $A^{-1} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = A^t$ נקבל: $a = d, b = -c$ והדטרמיננט: $a^2 + b^2 = 1$, משוויון זה נובע שקיימת זווית אחת ויחידה $0 \leq \theta < 2\pi$ כך ש- $a = \cos \theta, b = \sin \theta$ ולכן:

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

אם $\det A = -1$ ו- A אורתוגונלית: $A^{-1} = \begin{pmatrix} -d & b \\ c & -a \end{pmatrix} = A^t$, אז מהשוואת האיברים והדטרמיננטה נקבל אותה תוצאה הנ"ל, ולכן:

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$$

■

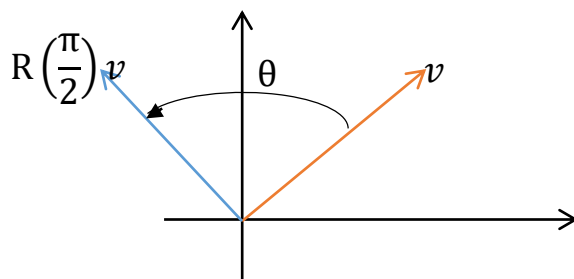
מסקנה: $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ מטריצת סיבוב אם ורק אם $\det A = 1$.

דוגמאות:

סיבוב בזווית $\frac{\pi}{2}$ בכיוון החיובי: $R\left(\frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{2} & -\sin \frac{\pi}{2} \\ \sin \frac{\pi}{2} & \cos \frac{\pi}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

כלומר, אם $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ אז $R\left(\frac{\pi}{2}\right)v = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

גיאומטרית:



סיבוב בזווית π בכיוון החיובי: $R(\pi) = \begin{pmatrix} \cos \pi & -\sin \pi \\ \sin \pi & \cos \pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

סיבוב בזווית $\frac{\pi}{2}$ עם כיוון השעון (בכיוון השלילי):

$$R\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) & -\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) \\ \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) & \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{2} & -\sin \frac{\pi}{2} \\ \sin \frac{\pi}{2} & \cos \frac{\pi}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

סיבוב בזווית $\frac{\pi}{4}$ בכיוון החיובי: $R\left(\frac{\pi}{4}\right) = \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{4} & -\sin \frac{\pi}{4} \\ \sin \frac{\pi}{4} & \cos \frac{\pi}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$

שיקוף ביחס לציר $\hat{x}$: $S_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

שיקוף ביחס לציר $\hat{y}$: $S_y = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

הערה: הכוונה במילה ציר היא וקטור מנורמל, ומערכת צירים היא בעצם בסיס

אורתונורמלי, למשל מערכת הצירים הסטנדרטית במישור: $\hat{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \hat{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

היא בעצם בסיס אורתונורמלי במרחב מכפלה פנימית סטנדרטית $\mathbb{R}^2$.

מטריצת (אופרטור) סיבוב במרחב $\mathbb{R}^3$

מטריצת סיבוב בזווית θ בכיוון החיובי (נגד כיוון השעון) סביב ציר $\hat{x}$:

$$R_x(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

מטריצת סיבוב בזווית ϕ בכיוון החיובי סביב ציר $\hat{y}$:

$$R_y(\phi) = \begin{pmatrix} \cos \phi & 0 & \sin \phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \phi & 0 & \cos \phi \end{pmatrix}$$

מטריצת סיבוב בזווית ψ בכיוון החיובי סביב ציר $\hat{z}$:

$$R_z(\psi) = \begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

שתי הערות:

1. הוכחת הטענה שהמטריצות הנ"ל הן מטריצות סיבוב אנלוגית להוכחת טענה 1.
2. הזוויות ψ , ϕ , θ נקראות זוויות אוילר, וכל סיבוב במרחב סביב ישר העובר דרך הראשית ניתן לתאר אותו ע"י כפל של מטריצות מהסוג הזה.

נשאלת השאלה: איך מגדירים מטריצת סיבוב סביב ישר כלשהו העובר בראשית הצירים?

הגדרת מטריצת סיבוב סביב ישר כזה נעשית על-ידי העברת בסיס סטנדרטי לבסיס אורתונורמלי שאחד הוקטורים שלו הוא וקטור יחידה הפורש את הישר, וקטור יחידה זה נקרא ציר הסיבוב, ולאחר מכן נשתמש במטריצת סיבוב סביב הציר הסטנדרטי שהועבר אל ציר הסיבוב החדש, אחרי שמבצעים את הסיבוב חוזרים למערכת צירים סטנדרטית.

צריך לשים לב שהצירים החדשים שומרים את כיוון הזוויות בין כל שני וקטורים המועברים ממערכת הצירים הסטנדרטית, תכונה זו נקראת אוריינטציה או מגמה או כיוון, והיא נשמרת על-ידי כל מטריצת מעבר בסיס (במקרה שלנו אורתוגונלית שעמודותיה הן וקטורי הבסיס האורתונורמלי החדש) שהדטרמיננטה שלה חיובי (במקרה שלנו שווה 1).

כלומר, אם $\hat{p}_1$ הוא וקטור יחידה הפורש את הישר L שסביבו רוצים להגדיר מטריצת סיבוב בזווית θ אז נשלים את $\hat{p}_1$ לבסיס אורתונורמלי $B = \{\hat{p}_1, \hat{p}_2, \hat{p}_3\}$, לאחר מכן נסמן את מטריצת מעבר בסיס האורתוגונלית שעמודותיה הן הוקטורים (p_1, p_2, p_3) ב- P , שימו לב שהדטרמיננטה של המטריצה P חייב להיות שווה 1 ולא -1, וגם המטריצה P מעבירה את ציר $\hat{x}$ אל ציר הסיבוב $\hat{p}_1$, כלומר $P\hat{x} = \hat{p}_1$ (הכוונה

כאן בציר $\hat{x}$ היא הוקטור הראשון בבסיס האורתונורמלי הסטנדרטי של $\mathbb{R}^3$: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$).

אחרי כל זה נגדיר את אופרטור הסיבוב כך שהמטריצה המייצגת אותו לפי הבסיס $B = \{\widehat{p}_1, \widehat{p}_2, \widehat{p}_3\}$ היא $R_L(\theta)$:

$$\mathbf{R}_L(\theta) = PR_x(\theta)P^{-1} = \mathbf{PR}_x(\theta)\mathbf{P}^t$$

הערה: למי שמתבלבל בצד של המטריצה P ואם P היא מטריצת מעבר מהסטנדרטי לבסיס B או ההפך, אז המטריצה P היא המטריצה שהעמודות שלה הן וקטורי הבסיס B , והיא חייבת להיות משמאל למטריצה $R_x(\theta)$ כי המטריצה P מעבירה וקטור קואורדינטות לפי הבסיס B לוקטור קואורדינטות לפי הבסיס הסטנדרטי, כלומר:

$$\forall v \in \mathbb{R}^3: P[v]_B = v$$

$$\text{כמו כן } P\widehat{x} = \widehat{p}_1, R_x(\theta)\widehat{x} = \widehat{x}, R_L(\theta)\widehat{p}_1 = \widehat{p}_1, \text{ מכאן:}$$

$$R_L(\theta)P\widehat{x} = P\widehat{x} = PR_x(\theta)\widehat{x}$$

$$\text{היות ו-} P\widehat{y} = \widehat{p}_2, P\widehat{z} = \widehat{p}_3:$$

$$\forall v \in \mathbb{R}^3: PR_x(\theta)P^t v = R_L(\theta)v$$

ומיחידות המטריצה המייצגת לפי בסיס כלשהו נקבל: $PR_x(\theta)P^t = R_L(\theta)$.

דוגמה: יהי $L = \left\{ t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| t \in \mathbb{R} \right\}$ ישר במרחב, נגדיר מטריצת סיבוב $R_L(\pi)$

נבחר $\widehat{p}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ (וקטור יחידה הפורש את L), נשלים את $\widehat{p}_1$ לבסיס אורתונורמלי:

(בעמודים האחרונים נראה שתי שיטות להגדרת מטריצה אורתוגונלית השומרת מגמה)

$$\left\{ \widehat{p}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \widehat{p}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \widehat{p}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

נגדיר את המטריצה האורתוגונלית שהדטרמיננטה שלה שווה 1 (מטריצת מעבר בסיס P):

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}$$

ונקבל את אופרטור הסיבוב: $R_L(\pi) = PR_x(\pi)P^t$

$$R_L(\pi) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$R_L(\pi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

הסבר גיאומטרי: בחישוב מטריצת סיבוב במישור סביב וקטור יחידה $\hat{p}_1$ כלשהו בזווית θ , משלימים את $\hat{p}_1$ לבסיס אורתונורמלי, כלומר מגדירים מערכת צירים חדשה שבה $\hat{p}_1$ הוא אחד הצירים. אחר כך מעבירים את מערכת הצירים הסטנדרטית למערכת הצירים $\{\hat{p}_1, \hat{p}_2, \hat{p}_3\}$ (על-ידי מטריצת מעבר בסיס P^t) כך ש- $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (הציר $\hat{x}$) יועבר לוקטור $\hat{p}_1$ ו- $\hat{p}_2, \hat{p}_3$ לשני הצירים $\hat{y}$ ו- $\hat{z}$ (בהתאמה למקומות של שני הוקטורים $\hat{p}_2, \hat{p}_3$ כעמודות במטריצת מעבר בסיס השומרת מגמה). מבצעים את הסיבוב באמצעות מטריצת סיבוב $R_x(\theta)$ (כי העברנו את הציר $\hat{x}$ לציר $\hat{p}_1$, אם היינו מעבירים ציר אחר לציר $\hat{p}_1$ היינו משתמשים כמובן במטריצת סיבוב בהתאמה), ושוב מחזירים את מערכת הצירים למערכת צירים סטנדרטית (על-ידי מטריצת מעבר בסיס P).

(בעמודים האחרונים נראה דוגמה בה אנחנו מעבירים את ציר $\hat{y}$ לציר הסיבוב $\hat{p}_1$ ומשתמשים ב- $R_y(\theta)$)

נראה כעת **איך לזהות ציר הסיבוב וזווית הסיבוב** בהינתן מטריצת סיבוב.

דוגמה: נראה בדוגמה זאת איך מוצאים זווית וציר סיבוב עבור מטריצת סיבוב:

$$R_L(\theta) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

תחילה נמצא ו"ע המתאים לע"ע $\lambda = 1$, ו"ע זה הוא פורש את ישר הסיבוב.

סכום השורות של המטריצה שווה 1, לכן $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ הוא ו"ע של ע"ע 1, לכן המטריצה

$$L = \left\{ t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}.$$

כעת, נמצא את הזווית θ , נבחר וקטור v אורתוגונלי לוקטור $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ונחשב את

הזווית בין v ו- $R_L(\theta)v$

$$R_L(\theta)v = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\cos \theta = \frac{\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle}{\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\| \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\|} = \frac{1}{2}$$

$$\theta = \frac{\pi}{3}$$

דרך נוספת לחישוב זווית הסיבוב היא באמצעות הע"עים והעקבה של המטריצה

$$\lambda_1 = 1 \implies \lambda_2 - \lambda_3 = \lambda + \bar{\lambda} = \text{tr}A - 1 = 1$$

$$\cos \theta + i \sin \theta + \cos \theta - i \sin \theta = 1$$

$$2 \cos \theta = 1$$

$$\theta = \frac{\pi}{3}$$

שיקופים במישור ובמרחב

בעמודים הקודמים ראינו שתי דוגמאות של שיקופים במישור, שיקופים ביחס לשני הצירים הסטנדרטיים $\hat{x}$ ו- $\hat{y}$:

שיקוף ביחס לציר $\hat{x}$: $S_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. **שיקוף** ביחס לציר $\hat{y}$: $S_y = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

כמובן במרחב וגם בכל מרחב וקטורי $\mathbb{R}^n$ ניתן להגדיר שיקופים ביחס לישר או מישור (העוברים בראשית הצירים) או תת-מרחב וקטורי כלשהו, וזה על-ידי הפיכת הסימנים של הצירים האורתוגונליים לצירים שפורשים את התת-מרחב שביחס אליו נרצה להגדיר את השיקוף. למשל בשיקוף ביחס לציר $\hat{x}$, הפכנו את סימן הציר $\hat{y}$, ובוה קיבלנו את S_x .

הרעיון הגיאומטרי להגדרת שיקוף ביחס לתת-מרחב, הוא להגדיר מערכת צירים בתת-מרחב (בסיס אורתונורמלי) ולהשלים אותו לבסיס אורתונורמלי לכל המרחב, ולהפוך את הסימנים של הצירים הפורשים את התת-מרחב האורתונורמלי לתת-מרחב שביחס אליו מגדירים את השיקוף.

דוגמה: נגדיר שיקוף ביחס למישור $W = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ ב- $\mathbb{R}^3$:

תחילה נגדיר מערכת צירים ב- W (בסיס אורתונורמלי) באמצעות תהליך גרם-שמידט:

$$p_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \|p_1\| = \sqrt{5} \Rightarrow \hat{p}_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$p_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \|p_2\| = \sqrt{6}$$

$$\Rightarrow \hat{p}_2 = \begin{pmatrix} -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

$$p_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

$$\|p_3\| = \sqrt{\frac{5}{6}} \Rightarrow \widehat{p_3} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

ולכן מטריצת השיקוף ביחס ל- W היא:

$$S_W = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} & 0 \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$S_W = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

דוגמה: שיקוף במישור ביחס לישר $L = \text{span}\left\{p_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$

נגדיר את הבסיס האורתונורמלי:

$$\left\{ \widehat{p_1} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \widehat{p_2} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \right\}$$

כעת נדגיר את אופרטור השיקוף:

$$S_L = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 \\ -1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

מבט נוסף על השיקוף

בחישוב שיקוף ביחס לתת-מרחב W של מרחב וקטורי V , אנחנו בעצם מייצגים את V כסכום ישיר של W והמשלים האורתוגונלי שלו $W^\perp$, כלומר $V = W \oplus W^\perp$, ובזה נקבל הצגה יחידה של כל וקטור v במרחב V , הצגה כסכום שני וקטורים אחד מ- W והשני מ- $W^\perp$, במילים אחרות לכל $v \in V$ קיימים שני וקטורים יחידים $w \in W$ ו- $u \in W^\perp$ כך ש- $v = w + u$. ולכן השיקוף של v ביחס למרחב W מתקבל מהפיכת הסימן של u , כלומר: $S_W v = w - u$.

הוקטור w נקרא ההטלה האורתוגונלית של v על W , והוקטור u הוא ההטלה האורתוגונלית של v על $W^\perp$, כיוון שאנחנו משתמשים בבסיס אורתונורמלי, אזי ניתן לחשב את שני הוקטורים w ו- u כצירוף לינארי של איברי הבסיס האורתונורמלי באמצעות מקדמי פורייה:

אם שני הבסיסים האורתונורמליים $\{\widehat{w}_1, \widehat{w}_2, \dots, \widehat{w}_j\}$ ו- $\{\widehat{u}_1, \widehat{u}_2, \dots, \widehat{u}_i\}$ פורשים את שני המרחבים W ו- $W^\perp$ בהתאמה, אזי לכל $v \in V$ מתקיים:

$$v = \sum_{k=1}^j \langle v, \widehat{w}_k \rangle \widehat{w}_k + \sum_{k=1}^i \langle v, \widehat{u}_k \rangle \widehat{u}_k = w + u$$

נחזור על הדוגמה האחרונה:

$$L = \text{span} \left\{ \widehat{p}_1 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \right\}, \quad L^\perp = \text{span} \left\{ \widehat{p}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

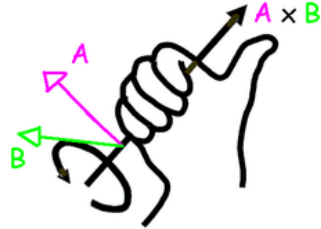
אופרטור השיקוף ביחס למרחב L :

$$\begin{aligned} S_L v = S_L \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y \\ \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

שתי שיטות להגדרת בסיס אורתונורמלי סדור שומר מגמה (מטריצת מעבר בסיס אורתוגונלית, או מטריצת סיבוב)

השיטה הראשונה: נשתמש בתהליך גרס-שמידת על מנת למצוא בסיס אורתונורמלי, נסדר בסיס זה כעמודות של מטריצה שהדטרמיננטה שלה שווה 1.

השיטה השנייה: באמצעות כלל יד ימין במכפלה וקטורית.



מכפלה וקטורית של שני וקטורים v, w היא וקטור אורתוגונלי למישור הנפרש על-ידי v, w . וקטור זה מסמנים ב- $v \times w$, וביחד עם שני הוקטורים לאחר נירמול בסדר $\hat{v}, \hat{w}, \widehat{v \times w}$ מקבלים בסיס אורתונורמלי סדור שומר מגמה.

את המכפלה הוקטורית של שני וקטורים $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$ מחשבים לפי הנוסחה:

$$v \times w = \det \begin{pmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix}$$

דוגמה: נחשב את $v \times w$ כאשר $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$

$$v \times w = \det \begin{pmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix} = 8\hat{x} - 4\hat{y} - 6\hat{z} = \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ -6 \end{pmatrix}$$

דוגמה: נמצא מטריצת סיבוב בזווית θ סביב הוקטור $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$. הפעם נגדיר בסיסי

אורתונורמלי סדור שומר מגמה באמצעות מכפלה פנימית ונעביר את הציר $\hat{y}$

לוקטור הנתון, ונשתמש ב- $R_y(\theta)$:

תחילה נגדיר בסיס אורתוגונלי ואחרי זה ננרמל:

נסמן $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, ונבחר וקטור אורתוגונלי ל- w ונסמן אותו ב- $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. כעת נמצא את $v \times w$:

$$v \times w = \det \begin{pmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = -2\hat{x} + \hat{y} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ננרמל את הוקטורים:

$$\hat{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \hat{w} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 \end{pmatrix}, v \times w = \begin{pmatrix} \frac{-2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 \end{pmatrix}$$

ובזה נקבל את מטריצת הסיבוב $R_w(\theta)$:

$$R_w(\theta) = P R_y(\theta) P^t$$

$$R_w(\theta) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{5}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{5}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^t$$

$$R_w(\theta) = \begin{pmatrix} \frac{4\cos \theta + 1}{5} & \frac{-2\cos \theta + 2}{5} & \frac{2\sin \theta}{\sqrt{5}} \\ \frac{-2\cos \theta + 2}{5} & \frac{\cos \theta + 4}{5} & -\frac{\sin \theta}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2\sin \theta}{\sqrt{5}} & \frac{\sin \theta}{\sqrt{5}} & \cos \theta \end{pmatrix}$$

