كسورٌ لا تُجبر

كان سالم في جيل السادسة عندما نبّهته أمه وحذَرته من الركض السريع على الشارع حتى لا يقع ويؤذي نفسه، سالم اليوم طالب جامعي يتعلم الرياضيات، وقد تذكّر قول أمه وتحذيرها هذا في محاضرة اليوم، ذلك لأن أمه أخبرته حينها وهو في جيل السادسة عن خطورة اللعب بتهور، وقالت له مُحذِّرةً أن اللعب بتهور قد يسبب له جروحا وكسورا، وإن من الكسور ما لا تُجبر!

كانت جملة أمه الأخيرة هي التي رسّخت تحذيرها بذهنه منذ جيل صغيرة، فهو لم يعرف حينها كسورا لا تجبر، ظن أن الجبيرة تفي بجبر كل الكسور، لكنه لاحقا أدرك أن من الكسور ما لا تجبر، وفي محاضرة اليوم برهن لهم البروفيسور أن من الأعداد أيضا كسور لا تجبر. لنرى كيف ذلك، ولنتعرف على هذه الأعداد الجميلة، وإن كان اسمها قرين الكسور، وإن كانت أيضا لا تجبر، ولنبدأ مع أول الأعداد التي تعرف البشر عليها:

الأعداد الطبيعية: ببساطة جدا، الأعداد الطبيعية هي كل الأعداد الصحيحة الموجبة، أو بصورة أخرى هي هذه الأعداد: $1, 2, 3, 4, \ldots$

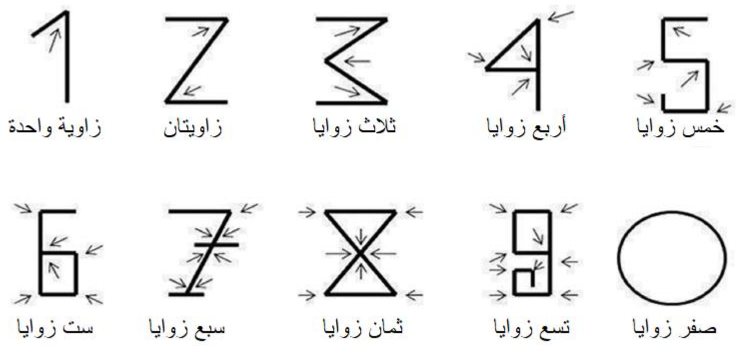
طبعا لا يمكننا كتابة جميع الأعداد، لذلك نكتفي بقليل منهم يصف استمراريتهم الى اللانهاية التي تُعبِّر عنها الثلاث نقاط.

قبل أن أتطرق إلى أنواع الأعداد انطلاقا من الطبيعية، أريد أن أحدّثكم قليلا عن الأعداد الطبيعية، ولنبدأ بالفرق بين الأعداد والأرقام.

الأرقام هي تلك الرموز التي نكتب ونصف بها الأعداد، أي أن الأرقام هي: $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0$

ولنتفق أن الأعداد هي ما يمكن وصفه بمساعدة هذه الأرقام.

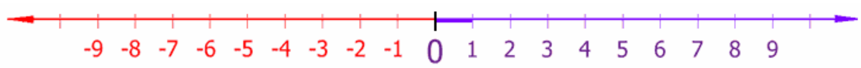
يستحضرني الآن جمال منطق كتابة الأرقام بهذه الصورة، فليس من فراغ نحن نكتب الأرقام بهذه الصورة، فمنطق كتابة الأرقام يعود إلى عدد الزوايا بكل رقم، ما أعنيه هو التالي:



طبعا تطور شكلها مع الأيام فأصبحت على النحو الذي نعرفه الآن. لنعود إلى أنواع الأعداد ولنتعرّف على النوع الثاني الذي تعرّف عليه البشر، أو بالأحرى الذي عَرَفَهُ البشر، وهي الأعداد الصحيحة أو الكاملة، أي هذه الأعداد: $\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$

لاحظ أن الأعداد الصحيحة هي أيضا مجموعة غير نهائية، من اليسار ومن اليمين، لذلك أضفت ثلاث نقاط من اليسار ومن اليمين.

وقد ذكرت أن البشر عرَف هذه الأعداد، نعم، فما معنى عدد سالب ؟ العدد السالب ببساطة يرمز الى كمية مستحقّة لبلوغك الصفر، أو بكلام أكثر وضوحا، العدد السالب يرمز الى مقدار بُعد نقطة موجودة على يسار الصفر في محور الأعداد المعتمد، أي هذا المحور:



والسؤال الذي يراودني الآن، هل العدد صفر هو سالب أم موجب ؟ العدد صفر لا يُعدُّ سالبا، كما لا يُعدُّ موجبا، لنتفق أنه عددٌ مُحايدٌ.

كانت الدنيا لتكون جميلة ربما إذا اقتصرت على الأعداد الصحيحة، لكنها ستكون سطحية أيضا، فماذا لو أراد أبٌ أن يقسم شيئا ما بين أولاده الإثنين ؟ فكيف نُعبّر عن حِصّة كل واحدٍ منهم، لنُفَكّر قليلا، إذا كان هذا الشيء بمقدار وحدتين وكانت القسمة عادلة فإن حصة كل واحد من الأولاد سيكون وحدة واحدة من أصل الوحدتين، أو إذا كان الشيء بمقدار أربع وحدات والقسمة عادلة، فحصة كل واحد ستكون وحدتين. لذلك فإن حصة الأولاد منوطة بمقدار الأصل وكيفية القسمة، وهذا ما دفعنا لننظر إلى حصة كلٍّ منهما نظرة نسبية، ومِن مثل هذا أتت حاجتنا إلى تعريف نوع آخر من الأعداد، الأعداد النسبية.

الأعداد النسبية هي أعداد تُعبّر عن النسبة بين مقدارين من ذات النوع، كما رأينا في المثال السابق، وقد ظنّ البشر أن الأعداد النسبية يمكن دائما كتابتها بصورة مقدار صحيح إلى مقدار صحيح، أي نسبة بين عددين صحيحين، أو كما اعتدنا أن نقول بسط ومقام، بحيث أن كليهما أعداد صحيحة، أو بصورة أبسط: $\frac{a}{b}$ بحيث أن a و b هما رمزان لعددين صحيحين، غير أن b لا يمكن أن يكون صفرا، وإلا أتت القسمة غير مُعَرّفة (سنتعمّق بمفهوم القسمة بمقالة قادمة).

وهذا ما اصطدم به الفيلسوف وعالم الرياضيات اليوناني المعروف فيثاغورس، ومَن مِنّا لا يعلم من هو فيثاغورس صاحب النظرية الشهيرة في مثلث قائم الزاوية: مجموع مربع كل قائم مساو لمربع الوتر. ما علينا، ليس هذا موضوعنا، وإنما موضوعنا بدأ من هناك، بالأخص عندما علم فيثاغورس أن مثلثا قائم الزاوية ومتساوي القائمين، إذا كان كل قائم فيه بطول وحدة واحدة فإن طول الوتر يكون $\sqrt{2}$ وحدات، وعندما أراد فيثاغورس أن يكتب $\sqrt{2}$ بصيغة بسط ومقام، اكتشف استحالة الأمر، عندها قام ببرهنة الاستحالة وتصنيف الأعداد إلى مجموعتين: الأعداد النسبية والأعداد الغير نسبية.

لنعود إلى الأعداد النسبية، فكما ذكرنا سابقا أن العدد النسبي هو العدد الذي بإمكاننا كتابته بصيغة بسط ومقام حيث أن البسط والمقام أعداد صحيحة مع الأخذ بالاعتبار أن المقام لا يمكن أن يكون صفرا، وقبل أن ننظر إلى مبرهنة فيثاغورس أن من الأعداد ما لا يمكن كتابتها بصيغة بسط ومقام صحيحين، لنتحدّث قليلا عن الأعداد النسبية.

يُطلق على الأعداد النسبية اسم كسور أيضا، لكون العدد النسبي هو جزء من كل، أو "كسر" من كل، لكن لهذا الجزء أن يكون أكبر من الكل، أو مساو له، وفي هذا فَلنُعَرِّف الكسور:

كسر بسيط: وهو الكسر الذي فيه البسط أصغر من المقام، مثلا: $\frac{1}{2}$ أو $\frac{3}{4}$
كسر مركّب: هو كسر فيه المقام أكبر من البسط أو يساويه: $\frac{6}{5}$ أو $\frac{21}{9}$ أو $\frac{2}{2}$
كسر مُختلط: هو كسر مكون من عدد صحيح وكسر: $2\frac{3}{4}$

طبعا للتعبير عن الكسور السالبة نضيف إشارة الناقص، لكن الأهم من هذا هي الكسور المختلفة الصورة التي تُعبّر عن ذات العدد، مثلا $\frac{1}{2}$ و $\frac{2}{4}$.

لنحل هذه الإشكالية بأن نرمز للكسر بالصورة الأبسط وهي عندما لا يكون بين البسط والمقام قواسم مشتركة، مثلا $\frac{1}{2}$ و $\frac{3}{4}$. الكسر $\frac{2}{8}$ ليس بصورته البسيطة، إذ أن العدد 2 هو قاسم مشترك للبسط والمقام، لذلك بإمكاننا أن نقسم البسط والمقام على العدد 2 وتحويل الكسر إلى صورته البسيطة $\frac{1}{4}$.

لنعود الآن الى مبرهنة فيثاغورس بأن $\sqrt{2}$ هو عدد غير نسبي، أي أن $\sqrt{2}$ لا يمكن كتابته بصيغة بسط ومقام بأعداد صحيحة، وإليكم البرهان:

قام فيثاغورس ببرهان هذا الادعاء عن طريق برهان بطلان عكسه، أي أنه افترض أن $\sqrt{2}$ هو عدد نسبي، ما معناه أن $\sqrt{2}$ يمكن كتابته بصيغة بسط ومقام بأعداد صحيحة، ولنفترض أن الصورة هي كالتالي:

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b}$$

لنفترض أيضا أن هذه الصيغة هي الأبسط، فإن لم تكن، قمنا بتبسيطها -بقسم البسط والمقام على القواسم المشتركة- إلى أن نحصل على الصورة الأبسط.

وإذا كانت هذه هي الصيغة الأبسط فإن بين البسط والمقام لا يوجد قواسم مشتركة (طبعا غير الواحد).
بتربيع الطرفين في الصيغة أعلاه نحصل على الصيغة:

$$2 = \frac{a^2}{b^2}$$

ومنها الصيغة:

$$2b^2 = a^2$$

وهنا نرى أن العدد a^2 هو عدد زوجي، كونه مساو لعدد صحيح مضروب بـ 2. وإذا كان a^2 هو عدد زوجي فإن a هو عدد زوجي (مربع كل عدد زوجي هو زوجي، ومربع كل عدد فردي هو فردي، والعكس صحيح، جرّب ذلك على عددين). إذن فالعدد a هو عدد زوجي، أي أن هناك عدد صحيح إذا ضربناه بـ 2 حصلنا على العدد a، لنرمز لهذا العدد الصحيح بـ c، وبهذا نحصل على الصيغة $a = 2c$.

ماذا الآن ؟

سنقوم بتعويض الصيغة الجديدة للعدد a بالمعادلة:

$$2b^2 = a^2$$

وبهذا نحصل على المعادلة:

$$2b^2 = (2c)^2$$

أو بصورة أخرى:

$$2b^2 = 4c^2$$

وإذا قسمنا طرفي المعادلة الأخيرة على 2 حصلنا على:

$$b^2 = 2c^2$$

إذن، العدد b^2 هو عدد زوجي، لذلك فإن العدد b زوجي أيضا.

وهنا حصل التناقض، إذ كيف للعددين a و b أن يكونا بلا قواسم مشتركة، وبذات الوقت عددين زوجيين! فكما نعلم أن كل عددين زوجيين يقسمان على 2، أي أن 2 هو قاسم مشترك لهما. ولما كان الادعاء العكسي غير صحيح، فإن الصحيح هو ما ادعيناه. أي أن $\sqrt{2}$ هو عدد غير نسبي.

*****

كم كان جميلا لسالم أن يرى برهان ما حذرته منه أمه في صغره، حقًا إن هناك "كسور" لا "تُجبر" بصيغة بسط ومقام صحيحين، وهو الآن يعرف واحدا من تلك الكسور: $\sqrt{2}$.