

איך מחשבים חזקה מרוכבת: z^w כאשר $z, w \in \mathbb{C}$?

בחישוב חזקה מרוכבת אנחנו משתמשים בפונקציות הלווגיות האגז. z .
באלו קצרים נראה איך נראה פונקציה זו בשפה הממוכנת, אצוריק לך
נציג את z בצורה קוטבית: $z = r e^{i\theta}$. גודל נקרא:

$$\ln z = \ln r e^{i\theta} = \ln r + i\theta$$

כאן אנחנו מניחים $\theta \in (-\pi, \pi]$ כפיאמנטל היאסי של z . כלומר $-\pi < \theta \leq \pi$.
ובנוסף גודל נקרא r (הוא חיובי) של הלווגיות.

כלומר בלי לזכור את θ הלווגיות
האגז (כזו) ככה:

$$\ln z = \ln r e^{i(\theta + 2\pi k)} = \ln r + i(\theta + 2\pi k), \quad k \in \mathbb{Z}$$

מעניין!!



נחזור "ז" z^w

נניח $c = w = a + bi$, $z = r e^{i\theta}$. מכאן:

$$z^w = e^{\ln z^w} = e^{w \ln z} = e^{w(\ln r + i\theta)} = e^{(a+bi)(\ln r + i\theta)}$$

$$= e^{a \ln r - b\theta} \cdot e^{i(b \ln r + a\theta)} = e^{a \ln r - b\theta} [\cos(b \ln r + a\theta) + i \sin(b \ln r + a\theta)]$$

נניח דוגמה: i^i , $i = e^{i\pi/2}$, $a=0, b=1$, $r=1, \theta=\pi/2$

$$i^i = e^{0 \ln 1 - 1 \cdot \pi/2} [\cos(1 \ln 1 + 0 \cdot \pi/2) + i \sin(1 \ln 1 + 0 \cdot \pi/2)]$$

$$= e^{-\pi/2} (\cos 0 + i \sin 0) = e^{-\pi/2}$$

$$i^i = e^{-\pi/2} \approx 0.2078795$$

סה"כ

דוגמה אחר: $(-3)^{2i}$, $a=0, b=2$, $z=3$: $r=3, \theta=-\pi$

$$(-3)^{2i} = e^{-2\pi} [\cos(2 \ln 3) + i \sin(2 \ln 3)] = \cos \ln 9 + i \sin \ln 9$$

$$(-3)^{2i} = 9^i \approx -0.5862549 + i 0.8101266$$