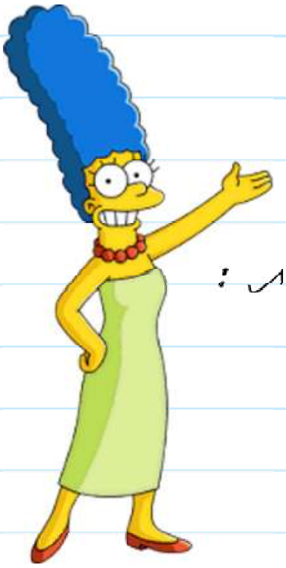


הוכחת זהות אוילר: $e^{ix} = \cos x + i\sin x$

נגדיר את הפונקציה $f(x) = (\cos x + i\sin x)e^{-ix}$.

כעת נוכיח ש- f קבועה ושווה ל- 1, נתבונן בנגזרת:

$$f'(x) = -i(\cos x + i\sin x)e^{-ix} + (-\sin x + i\cos x)e^{-ix}$$

$$= e^{-ix}(-i\cos x + \sin x - \sin x + i\cos x)$$

$$= 0$$

הנגזרת של f שווה לאפס לכל x, כלומר f קבועה, בשביל למצוא את הערך הקבוע של f, מספיק לבדוק בנקודה אחת, נציב $x=0$:

$$f(0) = (\cos 0 + i\sin 0)e^{0} = 1$$

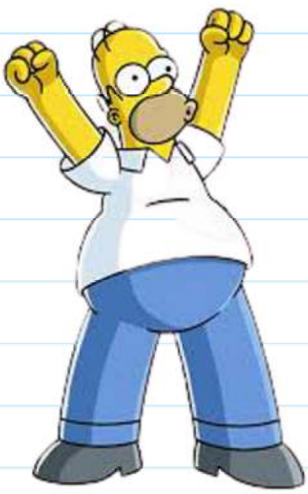
סה"כ, f קבועה ושווה זהותית ל- 1, ולכן:

$$(\cos x + i\sin x)e^{-ix} = 1$$

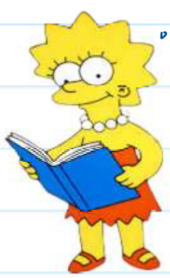
נכפיל את שני האגפים ב- e^{ix} ונקבל את הנדרש:

$$\cos x + i\sin x = e^{ix}$$

תודה רבה!



חכם!
יש לי הוכחה יותר יפה!



בהוכחה זו אני משתמשת בהתכנסות במ"ש של טורי חזקות (טורי מקלורן) הבאים :

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$\sin x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

נחליף את x בטור האקספוננט ב- ix :

$$e^{ix} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!} = 1 + \frac{ix}{1!} - \frac{x^2}{2!} - \frac{ix^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{ix^5}{5!} - \frac{x^6}{6!} - \dots$$

אך זה מתכנס במ"ש, ולכן הוא מתכנס ל- e^{ix} גם אם נסדר אותו אחרת:

$$e^{ix} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + \frac{ix}{1!} - \frac{ix^3}{3!} + \frac{ix^5}{5!} - \frac{ix^7}{7!} + \dots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + i \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

$$= \cos x + i \sin x$$

סה"כ :

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

$\blacksquare$