התכנסות נקודתית והתכנסות במ"ש של הטורים: $\sum_1^\infty \frac{\sin nx}{n}$, $\sum_1^\infty \frac{\cos nx}{n}$

בבדיקת התכנסות במ"ש (במידה שווה) של שני הטורים אנחנו משתמשים במבחן דיריכלה: יהי $\sum_1^\infty a_n(x)b_n(x)$ טור פונקציות. אם הסכומים החלקיים $B_n(x)$ של הטור $\sum_1^\infty b_n(x)$ חסומים, כלומר $|B_n(x)|<M$ לכל n ולכל x בתחום E. ובנוסף הסדרה $\{a_n(x)\}$ מונוטונית ומתכנסת במ"ש לאפס ב- E. אזי הטור $\sum_1^\infty a_n(x)b_n(x)$ מתכנס במ"ש ב- E.

נתבונן בטור $\sum_1^\infty \frac{\cos nx}{n}$, נגדיר $b_n(x)=\cos nx$, $a_n(x)=\frac{1}{n}$

ברור ש- $a_n(x)$ מונוטונית ומתכנסת במ"ש (לא תלויה ב- x) לאפס.

בנוסף:

$$B_n(x)=\sum_1^n \cos kx \overset{x\neq 2\pi m}{=} \sum_1^n \frac{2\cos kx \sin\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}} = \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\sum_1^n 2\cos kx\cdot\sin\frac{x}{2}$$

$$= \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\sum_1^n\left[\sin\left(\frac{2k+1}{2}\right)x-\sin\left(\frac{2k-1}{2}\right)x\right]$$

$$2\cos\alpha\sin\beta=\sin\frac{\alpha+\beta}{2}-\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

זהו טור טלסקופי

ולכן:

$$=\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\left(\sin\frac{2n+1}{2}x-\sin\frac{x}{2}\right)$$

ובכך נקבל:

$$|B_n(x)|=\left|\sum_1^n\cos kx\right|=\left|\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\right|\cdot\left|\sin\frac{2n+1}{2}x-\sin\frac{x}{2}\right|$$

$$\leq\left|\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\right|\cdot\left(\left|\sin\frac{2n+1}{2}x\right|+\left|\sin\frac{x}{2}\right|\right)\leq\left|\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\right|\cdot 2=\left|\frac{1}{\sin x/2}\right|$$

סה"כ:

$$|B_n(x)|\leq\left|\frac{1}{\sin x/2}\right|$$

זה לא אומר ש- $B_n(x)$ חסומה לכל x , כי הפונקציה $\frac{1}{\sin x/2}$ אינה חסומה.

אבל $B_n(x)$ חסומה בקטעים סגורים שאינם מכילים נקודה מהנקודות $x=2\pi m$, $m\in\mathbb{Z}$. והיא גם חסומה בקטעים פתוחים שהסגור שלהם אינו מכיל נקודה מהנקודות $x=2\pi m, m\in\mathbb{Z}$, במילים אחרות, הקטעים הפתוחים

מוכלים בקטעים סגורים שאינם מכילים מהנקודות $x=2\pi m, m\in\mathbb{Z}$.
או בניסוח אחר, הנקודות $x=2\pi m, m\in\mathbb{Z}$ לא שייכות לקטע הפתוח וגם לא בקצוות שלו. נסמן קטעים אלו ב-E.

ובנוסף, הפונקציה $\frac{1}{\sin\frac{x}{2}}$ היא כן חסומה לכל x ב-E.

מכאן: $|B_n(x)|<M$ לכל n ולכל $x\in E$. ולכן לפי דיריכלה

הטור $\sum_1^\infty \frac{\cos nx}{n}$ מתכנס במ"ש ב-E.

מה עם הקטעים שמכילים את מהנקודות $x=2\pi m, m\in\mathbb{Z}$?

בקטע כזה הטור אינו מתכנס נקודתית בכל נקודה $x=2\pi m$,
כי בנקודה כזו נקבל: $\sum_1^\infty \frac{\cos 2\pi m\cdot n}{n} = \sum_1^\infty \frac{1}{n}$

ולכן אינו מתכנס במ"ש.

מה עם קטעים פתוחים בהם הנקודה $x=2\pi m$ היא נקודת קצה (ואינה נקודת פנים)?

במקרה זה הטור מתכנס נקודתית לכל x בקטע, אך ההתכנסות אינה במ"ש. נוכיח זאת: נתבונן בקטע $[\alpha, 2\pi m)$ ונניח בשלילה שהטור מתכנס במ"ש בקטע $[\alpha, 2\pi m)$, כלומר לכל $\varepsilon>0$ קיים N (לא תלוי ב-x) כך שלכל $n>N$ מתקיים:

$$\left|S_{n+p}(x)-S_n(x)\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{\cos kx}{k}\right| < \varepsilon$$

נעבור לגבול $\lim_{x\to 2\pi m^-}\left|S_{n+p}(x)-S_n(x)\right| = \left|\sum_{n+1}^{n+p}\frac{\cos k2\pi m}{k}\right| = \left|\sum_{n+1}^{n+p}\frac{1}{k}\right| < \varepsilon$

כלומר הטור ההרמוני $\sum_1^\infty \frac{1}{n}$ מתכנס. סתירה.

הטור $\sum_1^\infty \frac{\sin nx}{n}$ לא שונה בהרבה מהטור $\sum_1^n \frac{\cos nx}{n}$:

תחילה נוכיח התכנסות נקודתית: נחשב לכל $x \neq 2\pi m$:

$$|B_n(x)| = \left|\sum_1^n \sin kx\right| = \left|\sum_1^n \frac{2\sin kx \sin\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}\right| = \left|\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\sum_1^n\left(\cos\frac{2k-1}{2}x - \cos\frac{2k+1}{2}x\right)\right|$$

$$= \left|\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\right| \cdot \left|\cos\frac{x}{2} - \cos\frac{2n+1}{2}x\right| \leq \left|\frac{1}{\sin\frac{x}{2}}\right|$$

$$2\sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)$$

עכשיו, אם $x = 2\pi m$, אזי הטור $\sum_1^\infty \frac{\sin nx}{n}$ הוא סכום אינסופי של אפסים, ולכן הטור $\sum_1^\infty \frac{\sin nx}{n}$ מתכנס נקודתית על כל הישר הממשי.

התכנסות במ"ש:

תחומי ההתכנסות במ"ש של הטור $\sum_1^\infty \frac{\sin nx}{n}$ הם אותם תחומים של $\sum_1^\infty \frac{\cos nx}{n}$:

לשם נוחות נוכיח זאת בקטע $[\pi, 2\pi)$ ובאופן דומה תוכלו להכליל הוכחה זו על כל קטע אחר שמכיל אחת מהנקודות $2\pi m$ או שאחת מנקודות אלו היא נקודת קצה.

נבחר $p = n$, $x_n = 2\pi - \frac{1}{n}$ ונחשב:

$$|S_{2n} - S_n| = \left|\sum_{k=0}^{n+1} \frac{\sin\left[(2n-k)(2\pi - \frac{1}{n})\right]}{2n-k}\right| = \left|\sum_{k=0}^{n+1} \frac{\sin\left[(2n-k)\frac{-1}{n}\right]}{2n-k}\right|$$

$$= \left|\sum_0^{n+1} \frac{-\sin\frac{2n-k}{n}}{2n-k}\right| = \left|\sum_0^{n+1} \frac{\sin\left(2-\frac{k}{n}\right)}{2n-k}\right|$$

הערכים של $\sin(2-\frac{k}{n})$ חיוביים ובנוסף $\sin(2-\frac{k}{n}) > \sin 1$, ולכן:

$$\left|\sum_{0}^{n+1} \frac{\sin\left(2-\frac{k}{n}\right)}{2n-k}\right| \geq \sum_{0}^{n+1} \frac{\sin\left(2-k/n\right)}{2n} \geq \frac{n\sin 1}{2n} = \frac{\sin 1}{2} > 0.4$$

ולכן, עבור $\varepsilon=0.4$ לא קיימת מידת התכנסות לכל x בקטע $[\pi,2\pi)$.

אז במילים אחרות, כל מידת התכנסות נקודתית (עבור x מסוים) המתאימה ל- $\varepsilon=0.4$ ניתן לנצח אותה ע"י x מהסדרה $x_n=2\pi-\frac{1}{n}$.

סיכום:

הטור $\sum_{1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n}$ מתכנס נקודתית לכל $x\neq 2\pi m$ ($m\in\mathbb{N}$).

הטור $\sum_{1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$ מתכנס נקודתית על כל הישר הממשי.

שני הטורים מתכנסים במ"ש בכל קטע (סגור או פתוח או חצי סגור חצי פתוח) שאינו מכיל (בתוכו או בקצה) אף נקודה מהצורה $x=2\pi m$ ($m\in\mathbb{Z}$).

הערה: הוכחת התכנסות במ"ש של $\sum_{1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$ הייתה יותר פשוטה אם נצליח להוכיח ש- $\sum_{1}^{\infty}\frac{\sin xn}{n}=\frac{\pi-x}{2}$ בקטע $(0,2\pi)$, כי בזה נקבל את הפונקציה הגבולית:

$$\sum_{1}^{\infty}\frac{\sin xn}{n}=\begin{cases}\frac{\pi-x}{2}, & 0<x<2\pi\\ 0, & x=0,2\pi\end{cases}$$

שאינה רציפה בקטע $[0,2\pi]$, ולכן ההתכנסות אינה במ"ש.

(*) הוכחה $\forall x\in(0,2\pi): \sum_{1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}=\frac{\pi-x}{2}$ ניתן לקבל מטורי פורייה.