



אנחנו גורמים אלמנט!

שני אינטגרלים מסוג זה של פונקציות טריגונומטריות:

$$I_1 = \int_0^{\infty} \frac{x}{e^x - 1} dx = \frac{\pi^2}{6}, \quad I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(2 \cos x) dx = 0$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots = \frac{\pi^2}{8}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6}$$

$$I_1 = \int_0^{\infty} \frac{x}{e^x - 1} dx$$

נחיל את הפונקציה:

$$I_1 = \int_0^{\infty} \frac{e^{-x}}{e^{-x}} \cdot \frac{x}{e^x - 1} dx = \int_0^{\infty} \frac{x e^{-x}}{1 - e^{-x}} dx$$

נשתמש בפיתוח טור פולינומי של $f(q) = \frac{1}{1-q}$ עבור $|q| < 1$:

$$I_1 = \int_0^{\infty} x e^{-x} \sum_{n=1}^{\infty} (e^{-x})^{n-1} dx$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} x e^{-x n} dx$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left[-\frac{x}{n} e^{-x n} \right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \frac{-e^{-x n}}{n} dx$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{x}{n} e^{-x n} - \frac{e^{-x n}}{n^2} \right) \Big|_0^{\infty}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(-\frac{x}{n} e^{-x n} - \frac{e^{-x n}}{n^2} \right) - \left(0 - \frac{1}{n^2} \right)$$

$$I_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

פונקציה טריגונומטרית
ואכן מתקיים:
 $\sum \xi = \xi$
פונקציה טריגונומטרית
שמה לא נמצא פתרון.

פיתוח טור פולינומי של $\frac{1}{1-q}$ עבור $|q| < 1$:
 $\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1} = 1 + q + q^2 + q^3 + \dots$
פונקציה טריגונומטרית
כאשר $q = e^{-x}$ נקבל:
 $\frac{1}{1-e^{-x}} = \sum_{n=1}^{\infty} (e^{-x})^{n-1}$
וזהו הפיתוח הנדרש.
 $|e^{-x}| < 1$ עבור $x > 0$.



* אינטגרל חלקי:

$$\int -x e^{-x n} dx = \left[u = -x \quad v = \frac{1}{n} e^{-x n} \right] = -\frac{x}{n} e^{-x n} - \int \frac{-e^{-x n}}{n} dx$$



אנחנו יודעים ש $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, לכן ננסה לחשב את I_2 :

$$I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(2\cos x) dx$$

נשתמש בזה: $\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$ נציב את זה ב I_2 :

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln e^{ix} (1 + e^{-2ix}) dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln e^{ix} + \ln(1 + e^{-2ix}) dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} ix dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(1 + e^{-2ix}) dx \end{aligned}$$



זוהי זהות

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

האינטגרל הראשון: $\left. \frac{ix^2}{2} \right|_0^{\frac{\pi}{2}} = i \frac{\pi^2}{8}$

כדי לחשב את האינטגרל השני נשתמש בפונקציה $f(z) = \ln(1+z)$:

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(1 + e^{-2ix}) dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} e^{-2inx} dx \\ (\text{הערה: } e^{-2inx} &= \cos(2nx) - i \sin(2nx)) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(-1)^{n+1}}{n} e^{-2inx} dx \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{-2in^2} \left. e^{-2inx} \right|_0^{\frac{\pi}{2}} \end{aligned}$$

פיתוח טור של $\ln(1+z)$

$$\ln(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} z^n$$

$$= z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \dots$$
 תנאי התכנסות: $z \neq -1$ ו- $|z| \leq 1$

$$e^{-in\pi} = \begin{cases} -1 & \text{אם } n \text{ זוגי} \\ 1 & \text{אם } n \text{ אי-זוגי} \end{cases}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2in^2} (e^{-in\pi} - 1)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n-1}}{2i(2n-1)^2} (-2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{i(2n-1)^2}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-i}{(2n-1)^2} = -i \left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \dots \right)$$

$$I_2 = i \frac{\pi^2}{8} - i \left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots \right)$$

$$I_2 = i \left[\frac{\pi^2}{8} - \left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots \right) \right]$$



!! 827

פאנלען I_2 דאן אינלעך מעש'!

אפגאבע שטייטן פיל מספר מציאות, אבער יעדן זיין געקערט, אהר, פאסירט:
 $i \left[\frac{\pi^2}{8} - \left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots \right) \right]$ ח"ה אבאר אלס. אבן:

$$\frac{\pi^2}{8} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots$$

גאט דאס וואס -e

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

נאכאנאן ערשטלעכע מספר : $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ מספר סדר זיגט -S, דאמיר:

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots = \left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots \right) + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \dots \right)$$

$$= \frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{2^2} \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots \right)$$

ס"ד :

$$S = \frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{4} S$$

אבן :

$$\frac{3}{4} S = \frac{\pi^2}{8}$$

דאס

$$S = \frac{\pi^2}{6}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{x}{e^x - 1} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

גאט דאס וואס :

