דוגמה למערכת אורתונורמלית שלמה שאיננה סגורה

כזכור, ℓ_2 הוא מרחב כל הסדרות המרוכבות $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots)$, המקיימות $\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2 < \infty$. המכפלה הפנימית ב- ℓ_2 מוגדרת ע"י

$$\langle (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots), (\beta_1, \beta_2, \beta_3, \dots) \rangle := \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \overline{\beta_n}.$$

לכל $n \in \mathbb{N}$ יהי e_n הוקטור

$$e_n := (0, \dots, 0, 1, 0, 0, \dots) \in \ell_2$$

(ה- 1 מופיע במקום ה- n-י). ראינו בהרצאה כי $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ היא מערכת א"נ סגורה ב- ℓ_2.

יהי x הוקטור $x := (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots) \in \ell_2$. לצורך הדוגמה, יהי V תת־המרחב של ℓ_2, המוגדר באופן הבא:

$$V := \operatorname{span}\{x, e_2, e_3, e_4, \dots\}$$

(זכרו: ה- span הוא מרחב הצירופים הלינאריים [הסופיים!] של איברים מהקבוצה הנתונה).

נתבונן במערכת $\{e_n\}_{n=\mathbf{2}}^{\infty}$. היא וודאי א"נ ב- V. נוכיח שהיא **שלמה** ב- V. יהי $y \in V$. אז קיימים $N \in \mathbb{N}$ וסקלרים $\alpha, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_N \in \mathbb{C}$ כך ש-

$$y = \alpha x + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 + \ldots + \alpha_N e_N.$$

נניח כי y מאונך לכל אברי המערכת הא"נ, דהיינו: $\langle y, e_n \rangle = 0$ לכל $n \geq 2$. בפרט,

$$0 = \langle y, e_{N+1} \rangle = \alpha \langle x, e_{N+1} \rangle + \alpha_2 \underbrace{\langle e_2, e_{N+1} \rangle}_{=0} + \alpha_3 \underbrace{\langle e_3, e_{N+1} \rangle}_{=0} + \ldots + \alpha_N \underbrace{\langle e_N, e_{N+1} \rangle}_{=0} = \alpha \langle x, e_{N+1} \rangle.$$

מהגדרת x נובע ש- $\langle x, e_{N+1} \rangle = \frac{1}{N+1} \neq 0$. על־כן, $\alpha = 0$, כלומר $y = \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 + \ldots + \alpha_N e_N$. כעת קל להראות, כי לאמיתו של דבר $y = 0$ (ביתר פירוט: לכל $2 \leq n \leq N$ מתקיים $\alpha_n = \langle y, e_n \rangle = 0$). לסיכום, $\{e_n\}_{n=\mathbf{2}}^{\infty}$ שלמה.

אולם, כמובטח, $\{e_n\}_{n=\mathbf{2}}^{\infty}$ **איננה סגורה** ב- V, שכן היא לא מקיימת את זהות פרסבל בנוגע לוקטור $x \in V$, כי:

$$\sum_{n=\mathbf{2}}^{\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2 = \sum_{n=\mathbf{2}}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \sum_{n=\mathbf{1}}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \|x\|^2.$$

ד"ר עמי ויסלטר, הפקולטה למתמטיקה, הטכניון – מט"ל