חשבון אינפיניטסימלי א' (210.1115) — תרגיל בית 12 לתלמידי תיכון
סמסטר א', תש"פ, 2019–2020

מתרגל: ד"ר עמי ויסלטר
החוג למתמטיקה, אוניברסיטת חיפה

הנחיות:

- הגשה: עד יום רביעי, 29.1.2020, בשעה 18:00, **בדואר אלקטרוני** למתרגל.
- ההגשה בזוגות בלבד. אנא כתבו את שמותיכם, את מספרי תעודות הזהות שלכם ואת מספר התרגיל.
- נמקו היטב את תשובותיכם!

1. הוכיחו שהפונקציות הבאות גזירות, וחשבו את נגזרותיהן באמצעות כללי הגזירה הבסיסיים.
   (א) הפונקציה $f:(0,\infty)\to\infty$ המוגדרת ע"י $f(x):=e^{x^5\sin^2(\ln x)}$ לכל x בתחום ההגדרה.
   (ב) הפונקציה $g:(-\infty,0)\to\infty$ המוגדרת ע"י $g(x):=\frac{\sqrt[3]{\cos x+2}+(-x)^{\sin x}}{x^2+1}$ לכל x בתחום ההגדרה (אחד התרגילים שלמדנו בתרגול יכול לעזור בפתרון, ומותר להשתמש בו).
2. תהי $f:(a,b)\to(c,d)$ חח"ע ועל (כלומר, הפיכה). נניח ש- f גזירה בנקודה $x_0\in(a,b)$, ש- $f'(x_0)\neq 0$, ושהפונקציה ההפוכה $f^{-1}:(c,d)\to(a,b)$ גזירה בנקודה $f(x_0)$. הוכיחו כי
$$\left(f^{-1}\right)'(f(x_0))=\frac{1}{f'(x_0)}.$$
   רמז: השתמשו בכך ש- $f^{-1}\circ f$ היא פונקצית הזהות ובכלל השרשרת.
3. נתבונן בפונקציה $\arcsin:[-1,1]\to\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$. נתון שהיא גזירה ב- $(-1,1)$ (אין צורך להוכיח זאת). הוכיחו בעזרת השאלה הקודמת שלכל $x\in(-1,1)$ מתקיים $(\arcsin)'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
   רמז: כדאי להשתמש בכך ש- $\sin^2 a+\cos^2 a=1$ לכל $a\in\mathbb{R}$.
4. הוכיחו שלכל $1\le a<b\le 2$ מתקיים $2(\ln b-\ln a)\le b^2-a^2$.
5. הוכיחו שלמשוואה $2x=\cos x$ יש פתרון אחד בדיוק $x\in\mathbb{R}$ (אסור להסתמך על חקירת פונקציות).
6. תהי $f:[1,3]\to\mathbb{R}$. נניח ש- f רציפה ב- $[1,3]$, ושנגזרתה f' קיימת ורציפה ב- $(1,3)$. נניח כי $f(1)=3$, $f(2)=1$ ו- $f(3)=2$.
   (א) הוכיחו שקיים $1<c<3$ כך ש- $f'(c)=1$.
   (ב) הוכיחו שקיים $1<d<3$ כך ש- $f'(d)=0$.
7. תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ גזירה כך ש- f' רציפה ב- $[a,b]$. הוכיחו שקיים $M\ge 0$ כך שלכל $x,y\in[a,b]$ מתקיים $|f(x)-f(y)|\le M\,|x-y|$.
8. (שאלת רשות) יהי $I\subseteq\mathbb{R}$ קטע, קרן או כל $\mathbb{R}$. נניח ש- $f:I\to\mathbb{R}$ גזירה וש- f' חסומה. הוכיחו ש- f רציפה במידה שווה ב- I.
9. לגבי כל אחד מהגבולות הבאים, הסבירו האם הוא קיים במובן הרחב, ובמקרה זה, חשבו את ערכו. יש להשתמש בכלל לופיטל.
   (א) $\lim_{x\to 0^+} x\ln(\sin x)$
   (ב) $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{2^x-1}$

(ג) $\lim_{x\to\infty} x\left(\sqrt[x]{a}-1\right)$ עבור פרמטר $a>0$

(ד) $\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right)$

(ה) $\lim_{x\to\infty} p(x)e^{-x}$, כאשר p פולינום.

בהצלחה!