מתמטיקה בהנדסת חשמל

פתרון תרגיל מס' 11

שאלה מס' (1):

$$y'' - x^2 y'' - 2xy' + 2y = 0$$

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$$

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot n \cdot x^{n-1}$$

$$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} a_n \cdot n(n-1) \cdot x^{n-2}$$

נציב במשוואה:

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n \cdot n(n-1) \cdot x^{n-2} - \sum_{n=2}^{\infty} a_n \cdot n(n-1) \cdot x^n - 2\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot n \cdot x^n + 2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2} \cdot (n+2) \cdot (n+1) \cdot x^n - \sum_{n=2}^{\infty} a_n \cdot n(n-1) \cdot x^n - 2\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot n \cdot x^n + 2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n = 0$$

$$a_2 \cdot 2 \cdot 1 + a_3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot x + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n+2} \cdot (n+2)(n+1) \cdot x^n - \sum_{n=2}^{\infty} a_n \cdot n \cdot (n-1) \cdot x^n$$

$$- 2a_1 \cdot 1 \cdot x - 2\sum_{n=2}^{\infty} a_n \cdot n \cdot x^n + 2a_0 + 2a_1 \cdot x + 2\sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n = 0$$

מקדמים של x^0:

$$\begin{cases} 2a_2 + 2a_0 = 0 \\ a_2 = -a_0 \end{cases}$$

מקדמים של x^1:

$$\begin{cases} 6a_3 = 0 \\ a_3 = 0 \end{cases}$$

עבור $n \geq 1$:

$$a_{n+2}(n+2)(n+1) - a_n \cdot n(n-1) - 2a_n \cdot n + 2a_n = 0$$

$$a_{n+2} = \frac{a_n \left[n(n-1) + 2n - 2 \right]}{(n+1)(n+2)} = \frac{a_n (n-1)(n+2)}{(n+1)(n+2)}$$

מכן נוסחת הנסיגה:

$$a_{n+2} = \frac{a_n (n-1)}{n+1}$$

a_0 : $a_2 = -a_0$, $a_4 = \frac{a_2 \cdot (2-1)}{(2+1)} = -\frac{a_0}{3}$

$$a_6 = \frac{a_4 (4-1)}{4+1} = \frac{-a_0 \cdot 1 \cdot 3}{1 \cdot 3 \cdot 5} = -\frac{a_0}{5}$$

$\Rightarrow a_{2k} = \frac{-a_0}{2k-1}$, $k = 1, 2, 3, \ldots$

a_1 : $a_3 = 0$, $a_5 = \frac{a_3 (3-1)}{3+1} = \frac{0 \cdot 2}{4} = 0$

$\Rightarrow a_{2k+1} = 0$, $k = 1, 2, 3, \ldots$

לכן:

$$y(x) = -a_0 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2n-1} + a_1 \cdot x$$

נמצא פתרון הומוגני:

$$\begin{cases} y_1(0) = 0 = a_0 \\ y_1'(0) = 1 = a_1 \end{cases} \Rightarrow \quad y_1(x) = x$$

נמצא פתרון הומוגני:

$$\begin{cases} y_2(0) = -1 = a_0 \\ y_2'(0) = 0 = a_1 \end{cases} \Rightarrow \quad y_2(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n-1)}$$

שאלה מס' (2):

נקודה $x_0=0$ היא נקודה רגולרית, לכן מתפתח פתרון מהצורה $y=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

ומהי הצורה המקוצרת הנוסחת נוסחת צעד מהצורה a_n:

$$a_{n+2}=\frac{-a_n(\lambda+n)}{(2+n)(1+n)}$$

I) כאשר $\alpha=\beta$ אי- $\begin{cases} y_1(0)=1 \\ y_1'(0)=0 \end{cases}$ מקבלים פתרון:

$$y_1(x)=1-4x^2+\frac{4}{11}x^4+\dots$$

II) כאשר $\alpha-\beta=$ אי- $\begin{cases} y_2(0)=1 \\ y_2'(0)=0 \end{cases}$ מקבלים פתרון:

$$y_2(x)=1+2x^4$$

ג) עבור כל $y_1(x)$ הינו פולינום

ד) עבור כל $y_2(x)$ הינו פולינום

ה) עבור כל $y_2(0)=4\neq 0$

ו) נכון עבור כל הנקודות שאינן שוות לאפס.

(ז) עבור כל המשוואה הזו נקודות סינגולריות על הנקודות סינגולריות רגולריות, לכן ניתן להשתמש

שני הפתרונות הם-בלתי תלויים שני הפתרונות הנ"ל תלויים.

שאלה מס' (3):

נכון כי $x=2$ נקודה רגולרית. ומכאן הפתרון שמתקבל הוא מהצורה:

$$\begin{cases} a_0 = 12 \\ a_1 = 9 \end{cases}$$

נעתיק משתנה $t = x-2$, כך שמרכזון שנוכל לומר כי הנקודה $x=0$.

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot t^n$$

המשוואה שלנו משתנה למשוואה הבאה:

$$y'' + (t+1)\cdot y' + y = 0$$

נגזור איבר איבר את הטורים, ונקבל:

$$y'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot n \cdot t^{n-1}$$

$$y''(t) = \sum_{n=2}^{\infty} a_n (n-1) n \cdot t^{n-2}$$

נציב במשוואה:

$$0 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot t^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot n \cdot t^{n-1} (t+1) + \sum_{n=2}^{\infty} a_n (n-1) n \cdot t^{n-2}$$

$$0 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot t^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot n \cdot t^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot n \cdot t^n + \sum_{n=2}^{\infty} a_n (n-1) n \cdot t^{n-2}$$

אפשר להשתמש שוב ברעיון שהתחיל איתנו כאשר גזרנו, שנוכל לשנות את האינדקס של כל אחד מהסכומים בצורה כזו שהחזקה של t תהיה מהצורה t^n ונוכל לאחד את הסכומים.

ולכן נוכל להסתכל על הסכומים שמתחילים מ- n ל- 0.

$$0 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot t^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} (1+n) \cdot t^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot n \cdot t^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2} \cdot (1+n)(2+n) \cdot t^n$$

נקבץ איברים בעלי חזקות שוות ונקבל:

$$0 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot t^n + a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n+1} (1+n) \cdot t^n + a_1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot n \cdot t^n + 2a_2 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n+2} (1+n)(2+n) \cdot t^n$$

(4)

כאשר מתקיים לכל טור חזקות:

$$0 = t^n \cdot \left\{ a_{n+1} + a_n \cdot (n+1) + (n+1)(n+2) \cdot a_{n+2} \right\} + \left[2a_2 + a_1 + a_0 \right] + \sum_{n=1}^{\infty}$$

נסמן מקדמים:

$$2a_2 + a_1 + a_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad a_2 = -\frac{a_1 - a_0}{2} = -\frac{12 - 6}{2} = -9$$

$$(n+2)(n+1) \cdot a_{n+2} + n \cdot a_n + (n+1) \cdot a_{n+1} + a_n = 0$$

$$(n+2)(n+1) \cdot a_{n+2} + (n+1) a_{n+1} + (n+1) \cdot a_n = 0 \quad / : (n+1)$$

$$a_{n+2} = -\frac{a_n - a_{n+1}}{n+2} \quad , \quad n \geq 2$$

תרגיל:

$$\text{נתון} \begin{cases} a_0 = 12 \\ a_1 = 6 \end{cases}$$

$a_2 = -9$ מיצאנו

$$a_3 = a_{1+2} = -\frac{a_1 - a_2}{3} = -\frac{6 + 9}{3} = 1$$

$$a_4 = a_{2+2} = -\frac{a_2 - a_3}{4} = \frac{9 - 1}{4} = 2$$

תרגיל:

$$\sum_{n=2}^{4} a_n = a_2 + a_3 + a_4 = -9 + 1 + 2 = -6$$

שאלה מס' (4):

$x = 2$ נקודה רגולרית, נסמן $t = x - 2$ לכן:

$$y'' + (t+1) y' = 0$$

$$y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot t^k$$

$$y' = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot k \cdot t^{k-1}$$

$$y'' = \sum_{k=2}^{\infty} a_k \cdot k \cdot (k-1) \cdot t^{k-2}$$

נתון: $a_0 = 12$ ו- $a_1 = 6$.

נציב בשוויון ונקבל:

$$0=\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)\cdot a_k\cdot t^{k-2}+(t+1)\cdot\sum_{k=1}^{\infty} k\cdot a_k\cdot t^{k-1}$$

נפתח סוגר ונסדר כך שכולם מחזקה קודמת ונקבל:

$$0=\sum_{k=1}^{\infty}(k+2)(k+1)\cdot a_{k+2}\cdot t^k+\sum_{k=1}^{\infty} k\cdot a_k\cdot t^k+a_1+\sum_{k=1}^{\infty}(k+1)\cdot a_{k+1}\cdot t^k+2a_2$$

נשווה מקדמים:

$$2a_2+a_1=0 \quad \Rightarrow \quad a_2=-6$$

$$a_{k+2}=\frac{-k\cdot a_k-(k+1)\cdot a_{k+1}}{(k+2)(k+1)}\quad,\quad k\geq 2$$

כאשר $a_0=12$, $a_1=12$, $a_2=-6$

נמצא a_3 ו- a_4

$$a_3=\frac{-a_1-2a_2}{3\cdot 2}=0$$

$$a_4=\frac{-2a_2-3a_3}{4\cdot 3}=\frac{12-0}{12}=1$$

ולכן:

$$\sum_{k=1}^{4} a_k=7$$

שאלה מס' (5):

נקודה רגולרית, ניתן לפתח בטור חזקות:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$$

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n \cdot x^{n-1}$$

$$y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) \cdot a_n \cdot x^{n-2}$$

נציב במשוואה ונקבל:

$$e^x = \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n + a_n \cdot n - a_{n+1}(1+n)(2+n) \right] + a_0 + 2a_2$$

כאשר e^x סביב $x=0$ הינו:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

מהשוויון מתקבל עד סדר 4 ולכן:

$$(2a_2 + a_0) \cdot x^0 + (6a_3 - a_1 + a_0) \cdot x + (12a_4 - 2a_2 + a_1) \cdot x^2 + (a_3 + 3a_3 - 20a_5) \cdot x^3 + (24a_4 + 4a_4 - 30a_6) \cdot x^4 = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}$$

לכן:
$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_1 = 1 \end{cases}$$

נשווה מקדמים:

x^0: $2a_2 + a_0 = 1 \Rightarrow a_2 = 0$

x^1: $6a_3 = 1 \Rightarrow a_3 = \frac{1}{6}$

x^2: $12a_4 - a_2 = \frac{1}{2} \Rightarrow a_4 = \frac{1}{24}$

x^3: $20a_5 - 2a_3 = \frac{1}{6} \Rightarrow a_5 = \frac{1}{40}$

x^4: $30a_6 - 3a_4 = \frac{1}{24} \Rightarrow a_6 = \frac{1}{180}$

ולכן מקבלת על x^4 שגיאה $\frac{1}{24} = 4!$.

ומשום כך ובלשון אחרת נאמר כל הנאמר רק כי בקבוצה

מקבלת על x^4 ואחרת בכל מקרה שאלה מקבלת

את הערך על x^4 ועל יותר מכאלה מהנ"ל בקבוצת x^4 בערך

כ. שגיאה $\frac{1}{24}$. 