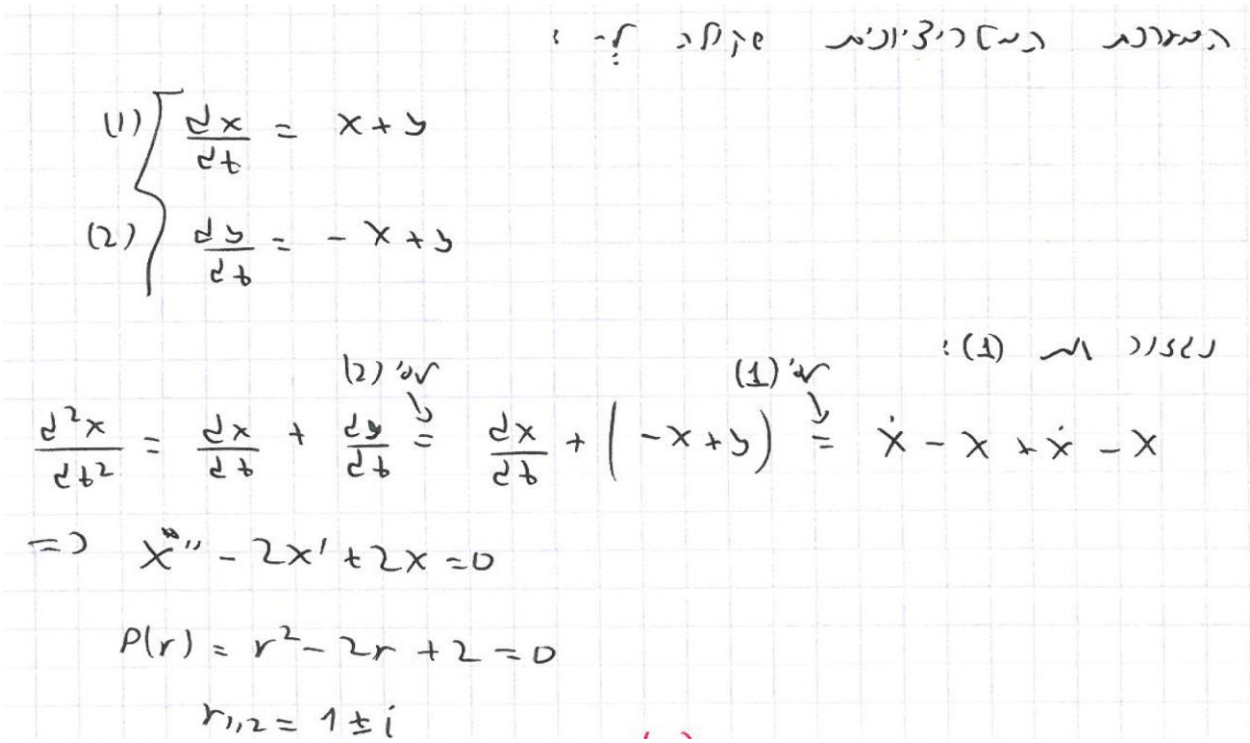
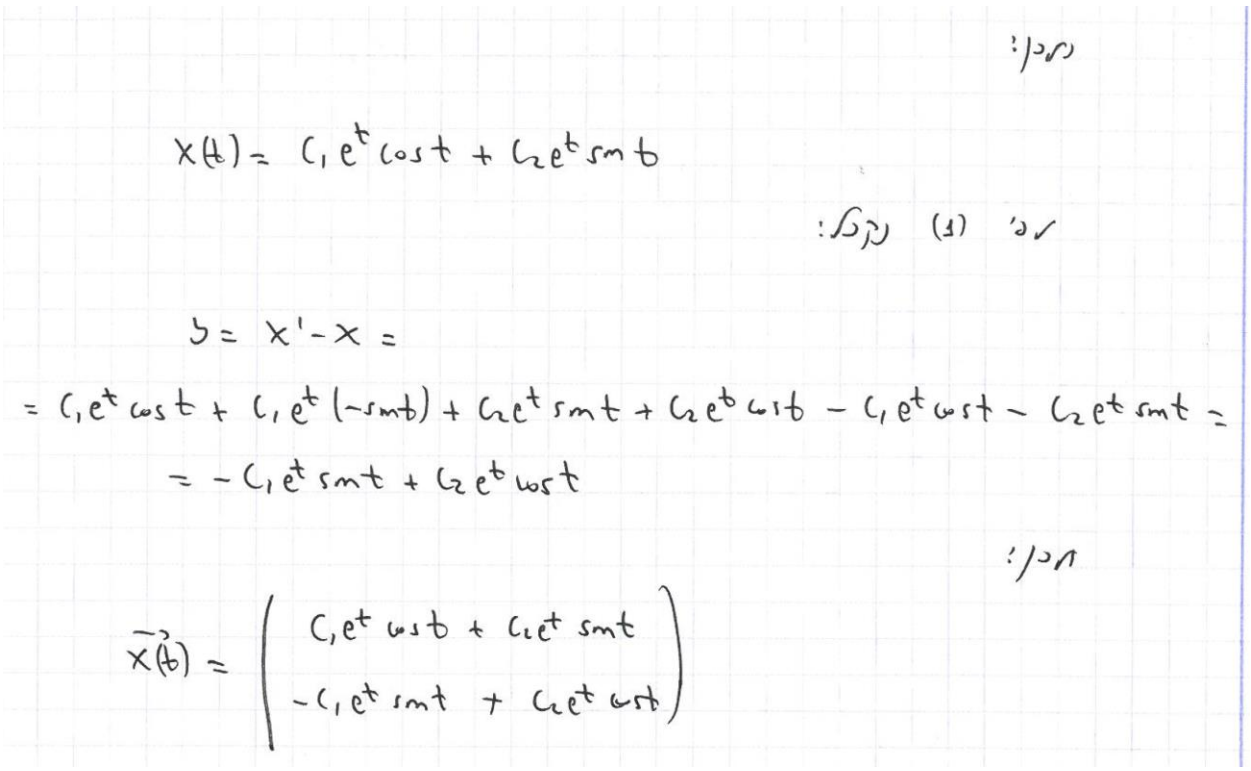
משוואות דיפרנציאליות רגילות

פתרון תרגיל בית 10

שאלה מס' 1:





שאלה מס' 2:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \quad , \quad F(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} \\ 8e^{2t} \end{pmatrix}$$

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -2-\lambda & 1 \\ -3 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (-2-\lambda)(2-\lambda) + 3 = 0$$

$$\lambda_1 = +1 \quad , \quad \lambda_2 = -1$$

ו"ע עבור $\lambda_1 = 1$:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

ו"ע עבור $\lambda_2 = -1$:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

פתרון כללי של ההומוגנית:

$$X(t) = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} e^{t} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} = C_1 \begin{pmatrix} e^{t} \\ 3e^{t} \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} e^{-t} \\ e^{-t} \end{pmatrix}$$

$$X_p(t) = \begin{pmatrix} e^{t} & e^{-t} \\ 3e^{t} & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1(t) \\ C_2(t) \end{pmatrix}$$

פתרון מערכת המשוואות:

$$\begin{pmatrix} e^t & e^{-t} \\ 3e^t & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1'(t) \\ c_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2t} \\ 8e^{2t} \end{pmatrix}$$

$$\Delta_0 = \begin{vmatrix} e^t & e^{-t} \\ 3e^t & e^{-t} \end{vmatrix} = 1-3 = -2$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} e^{2t} & e^{-t} \\ 8e^{2t} & e^{-t} \end{vmatrix} = e^t - 8e^t = -7e^t$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} e^t & e^{2t} \\ 3e^t & 8e^{2t} \end{vmatrix} = 8e^{3t} - 3e^{3t} = 5e^{3t}$$

$$c_1'(t) = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-7e^t}{-2} = \frac{7}{2}e^t \quad \Rightarrow \quad c_1(t) = \frac{7}{2}e^t$$

$$c_2'(t) = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{5e^{3t}}{-2} = -\frac{5}{2}e^{3t} \quad \Rightarrow \quad c_2(t) = -\frac{9}{5}e^{3t}$$

$$X_p(t) = \begin{pmatrix} e^t & e^{-t} \\ 3e^t & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{7}{2}e^t \\ -\frac{9}{5}e^{3t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{9}{10}e^{2t} \\ \frac{9}{10}e^{2t} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{X}(t) = \begin{pmatrix} c_1 e^t + c_2 e^{-t} + \frac{8}{5}e^{2t} \\ 3c_1 e^t + c_2 e^{-t} + \frac{16}{5}e^{2t} \end{pmatrix}$$

שאלה מס' 3:

פתרון:

$$\det\begin{bmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 0 & 2-\lambda \end{bmatrix} = (2-\lambda)^2 = 0$$

$\lambda = 2$ מכפולה אלגברית 2

נמצא וקטור:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$y = 0$

$x = 1$ ולכן

כלומר $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ וקטור אחד שלנו כי $k = 1$

ונמצא:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix}$$

$z = 1$

$w = 0$ ולכן

ונמצא $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ וקטור זה

ולכן הפתרון:

$$\vec{x}(t) = c_1 \cdot e^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2\left[t\cdot e^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + e^{2t}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right]$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = x(0) = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$c_1 = c_2 = 1$$

$$\vec{x}(t) = e^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\cdot e^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + e^{2t}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = e^{2t}\begin{pmatrix} t+1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$x(-1) = e^{-2}\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-2} \end{pmatrix}$$

(7)

שאלה מס' 4:

פתרון: נרשום את המערכת בצורה מטריציונית:

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}}_{A} \cdot \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} e^{-t} \\ -2e^{-t} \end{pmatrix}}_{\vec{g}(t)}$$

נפתור את המערכת ההומוגנית:

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

נמצא ערכים עצמיים של מטריצה A:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -2 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\cdot(-2-\lambda) + 2 = -2\lambda + \lambda^2 + 2 =$$

$$\lambda^2 + \lambda = 0$$

$$\lambda_1 = 0$$

$$\lambda_2 = -1$$

נמצא $\vec{v}_1$ הוקטור עבור $\lambda = 0$ ונקבל:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} m \\ z \end{pmatrix} \quad \text{כלומר} \quad \vec{0} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \vec{v}_1$$

ונקבל: $\begin{cases} m = -z \\ z = t \end{cases}$

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

נמצא $\vec{v}_2$ הוקטור עבור $\lambda = -1$ ונקבל:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m \\ z \end{pmatrix} \quad \text{כלומר}$$

ונקבל: $\begin{cases} m = -t \\ z = 2t \end{cases}$

$$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

נקח:

$$\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\beta+\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}A=\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y(0)\\x(0)\end{pmatrix}$$

ונמצא:

$$\begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\end{pmatrix}=A\cdot\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}+\beta\cdot\begin{pmatrix}-e^{-t}\\2e^{-t}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1+e^{-t}\cdot t\\1-e^{-t}\cdot t-2e^{-t}\end{pmatrix}$$

ובסה"כ נקבל כי:

$$\overrightarrow{X_p}(t)=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\cdot 1+\begin{pmatrix}-t\\-e^{-t}\\2e^{-t}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-e^{-t}\cdot t+1-t\\-e^{-t}\cdot t+2e^{-t}-1\end{pmatrix}$$

וכן פתרון פרטי הוא:

$$h_2(t)=-t$$

אז:

$$h_1(t)=\int 1=t$$

מציבים $t=1$

$$1-=\frac{-e^{-t}}{-e^{-t}}=\frac{-e^{-t}-2e^{-t}}{-e^{-t}}=\frac{\begin{vmatrix}-1&e^{-t}\\1&-2e^{-t}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}-1&-e^{-t}\\1&2e^{-t}\end{vmatrix}}=h_2'(t)$$

$$0=\frac{0}{-e^{-t}}=\frac{-e^{-t}+2e^{-t}-2e^{-t}}{-2e^{-t}+e^{-t}}=\frac{\begin{vmatrix}e^{-t}&-e^{-t}\\-2e^{-t}&2e^{-t}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}-1&-e^{-t}\\1&2e^{-t}\end{vmatrix}}=h_1'(t)$$

נשתמש בנוסחת קרמר:

$$\begin{pmatrix}e^{-t}\\-2e^{-t}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&-e^{-t}\\1&2e^{-t}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}h_1'(t)\\h_2'(t)\end{pmatrix}$$

נפעיל מטריצה על המקדים:

$$\overrightarrow{X_p}(t)=h_1(t)\cdot\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}+h_2(t)\cdot\begin{pmatrix}-e^{-t}\\2e^{-t}\end{pmatrix}$$

כאשר נמצא פתרון פרטי:

$$\overrightarrow{X_2}(t)=e^{-t}\cdot\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-e^{-t}\\2e^{-t}\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{X_1}(t)=e^{0\cdot t}\cdot\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$$

ואז נוכל לבטא את המערכת הבאה:

נציב:

$$+\begin{cases} -1 = -A - B - 1 \\ 0 = A + 2B + 1 \end{cases}$$

$$-1 = B$$

מכאן: $0 = -A + 1$

$$A = 1$$

מכאן:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^{-t} \\ -2e^{-t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 + t\cdot e^{-t} \\ 1 - 2te^{-t} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 + (t+1)e^{-t} \\ 2 - 2(t+1)e^{-t} \end{pmatrix}$$

מכאן שכאשר $t = -1$ נקבל:

$$\begin{pmatrix} x(-1) \\ y(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$