מבחן מועד ב' סמסטר א' תשע"ה

פתרון מבחן מועד (ב)

שאלה מס' (1):

הפולינום האופייני:

$$p(r) = r(r-1)(r-2) + 2r(r-1) + 1 - r$$

אפשר לראות שאפשר להוציא את הביטוי $1-r$ מכל שלושת האיברים:

$$p(r) = (1-r)\left[r(r-2) + 2r + 1\right] = (1-r)\left[r^2 - 2r + 2r + 1\right] = (1-r)(1+r^2)$$

ולכן השורשים הקרקטריסטים של המשוואה הם:

$$r_1 = 1$$

$$r_2 = i = 0 + i$$

$$r_3 = -i = 0 - i$$

לכאורה 3 פתרונות פתרון על המשוואה הם:

$$y_1(x) = x^0 = x \quad , \quad y_2(x) = x^0 \cdot \cos(1 \cdot \ln x) = \cos(\ln x) \quad , \quad y_3(x) = x^0 \cdot \sin(1 \cdot \ln x) = \sin(\ln x)$$

והפתרון הכללי למשוואה:

$$y(x) = Ax + B\cos(\ln x) + C\sin(\ln x)$$

הערה: כיצד ניתן לדעת אילו פתרונות אלו נופלים תחת מושגים בעקרונה $x = 0$, ועל כך כי משוואת אוילר הנתונה הנו שהם מקדמים של פולינום בעקרונה $x = 0$.

שאלה מס' (2):

מציבים $x = e^t$ ומקבלים את המשוואה:

$$y'' - 3y' + 2y = e^{3t}$$

נחל פותרים בשלבים שכן המשוואה מקדמים:

הפולינום של המשוואה:

$$p(r) = r^2 - 3r + 2 = (r-2)(r-1)$$

לכן הפתרונות של המשוואה ההומוגנית: e^{2t} , e^t

נשים לב כי 3 הינו שורש של הפולינום לכן נעזר בפתרון פרטי מהצורה:

$$y_p(x) = Ce^{3t}$$

נציב במשוואה:

$$(Ce^{3t})'' - 3(Ce^{3t})' + 2\cdot Ce^{3t} = 9Ce^{3t} - 9Ce^{3t} + 2e^{3t}$$

$$\Rightarrow \quad 2Ce^{3t} = e^{3t}$$

$$\Rightarrow \quad C = \frac{1}{2}$$

ולכן פתרון כללי של המשוואה המקורית על t:

$$y(t) = Ae^t + Be^{2t} + \frac{e^{3t}}{2}$$

ומכאן שפתרון המקורי הוא, עבור $t = \ln x$:

$$y(x) = Ax + Bx^2 + \frac{x^3}{2}$$

שאלה מס' (3):

נתחיל בפתרון שלה ההומוגנית: $y'' + y = 0$

פ"א:

$$r^2 + 1 = 0$$

$$\Rightarrow \quad r_{1,2} = \pm i$$

$$y_h(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x$$

נמצא פתרון פרטי ע"י שיטת וריאציית הפרמטרים:

$$y_p(x) = C_1(x)\cdot \cos(x) + C_2(x)\cdot \sin(x)$$

פותרים מערכת של משוואות:

$$\begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1'(x) \\ C_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ f(x) \end{pmatrix}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = 1$$

$$C_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \sin x \\ f(x) & \cos x \end{vmatrix}}{1} = -f(x)\cdot \sin x$$

$$\Rightarrow \quad C_1(x) = -\int_0^x f(t)\sin t\, dt = x^2 \sin x \cdot f(x)$$. קבוע

נשים לב כבר עכשיו שבחירה זו של $f(t)$ תגרום לכך שהאינטגרל יתאפס:

$$C_1(x) = \int_0^x \sin^2(t)\,dt = \int_0^x \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2t\right) dt = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x$$

$$\lim_{x\to\infty} C_1(x) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x\right) = \infty$$

$\Leftarrow$ גדל מונוטוני ושואף לאינסוף כאשר $x\to\infty$.

שאלה מס' (4):

פתרון כללי של המשוואה $y'' + y' + y = 0$ הוא:

$$y(x) = C_1 e^{-\frac{1}{2}x} + C_2 x e^{-\frac{1}{2}x}$$

פתרון פרטי של המשוואה $y'' + y' + y = f(x)$ הוא:

$$y(x) = C_1(x) e^{-\frac{1}{2}x} + C_2(x) x e^{-\frac{1}{2}x}$$

נקבל מהמערכת הבאה:

$$\begin{cases} C_1'(x) e^{-\frac{1}{2}x} + C_2'(x) x e^{-\frac{1}{2}x} = 0 \\ C_1'(x)\left(-\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}\right) + C_2'(x)\left(e^{-\frac{1}{2}x} - \frac{1}{2}x e^{-\frac{1}{2}x}\right) = e^{-\frac{1}{2}x} \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} e^{-\frac{1}{2}x} & x e^{-\frac{1}{2}x} \\ -\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x} & e^{-\frac{1}{2}x} - \frac{1}{2}x e^{-\frac{1}{2}x} \end{vmatrix} = e^{-x} - \frac{1}{2}x e^{-x} + \frac{1}{2}x e^{-x} = e^{-x}$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & x e^{-\frac{1}{2}x} \\ e^{-\frac{1}{2}x} & e^{-\frac{1}{2}x} - \frac{1}{2}x e^{-\frac{1}{2}x} \end{vmatrix} = -x e^{-x}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} e^{-\frac{1}{2}x} & 0 \\ -\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x} & e^{-\frac{1}{2}x} \end{vmatrix} = e^{-x}$$

$$C_1'(x) = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-x e^{-x}}{e^{-x}} = -x \quad \Rightarrow \quad C_1(x) = -\frac{1}{2}x^2$$

$$C_2'(x) = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{e^{-x}}{e^{-x}} = 1 \quad \Rightarrow \quad C_2(x) = x$$

ולכן הפתרון הכללי:

$$y(x) = -\frac{1}{2}x^2 e^{-\frac{1}{2}x} + x\cdot x e^{-\frac{1}{2}x} + C_1 e^{-\frac{1}{2}x} + C_2 x e^{-\frac{1}{2}x} = \left(C_1 + C_2 x + \frac{1}{2}x^2\right) e^{-\frac{1}{2}x}$$

שאלה מס' (5):

המשוואה האופיינית: $y'' - y' + \lambda y = 0$

פ"א: $r^2 - r + \lambda = 0$

אם $\lambda = 0$ אזי שורש המשוואה הוא

$r_1 = 0$

$r_2 = 1$

אם $\lambda \neq 0$ אזי שורשי המשוואה הם

$$r_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \lambda}$$

יהי λ המקיים את המשוואה הנ"ל תהא y_1 פתרון שהוא מהצורה e^{rx}

כאשר $\lambda \neq 0$.

נבחין במקרים הבאים:

1) כאשר r_1, r_2 שורשים ממשיים שונים:

$$y_h(x) = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}$$

2) כאשר $\frac{1}{2} = r_1 = r_2$ במילים אחרות $\lambda = \frac{1}{4}$

$$y_h(x) = c_1 e^{\frac{1}{2}x} + c_2 x e^{\frac{1}{2}x}$$

3) כאשר שורשים מרוכבים $r_{1,2} = \frac{1}{2} \pm i\beta$

$$y_h(x) = e^{\frac{1}{2}x} \cdot (c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x)$$

4) כלכול כאשר $\lambda = 0$ מקבלים:

$$y_h(x) = c_1 + c_2 e^x$$

נשים לב כי המקרה של משוואה לא הומוגנית:

$$y_h(x) = c_1 + c_2 e^x + A \cos x + B \sin x = y_h(x) + y_p(x)$$

לכל בחירה כלשהי שכזאת $\lambda \neq 0$ בשלב הראשון e^x הפתרון הכללי

לעיל מתנהג.

כאשר $\lambda = 0$ הפתרון הכללי:

$$y(x) = c_1 + c_2 e^x + A \cos x + B \sin x$$

שאלה זו מתנהגת כי c_2 מתקיים תלות ליניארית מתנגשים.

שיעור מס' (6):

ו) $y''+y=(1+x)e^x$

$y''+y'=0$

$r^2+r=0$

$r(r+1)=0$

$r_1=0\ ,\ r_2=-1$

הפתרון ההומוגני הוא $y_h(x)=(1+x)e^{-x}$

1 - הבא אורך על פניו מרכיב 1 לפתרון מכפלה פתרון מהצורה:

$y_p(x)=x(Ax+B)e^{-x}$

ב) $y''-6y'+13y=e^{3x}\cos 2x$

$y''-6y'+13y=0$

$r^2-6r+13=0$

$r_{1,2}=3\pm 2i$

הפתרון ההומוגני הוא $y_1(x)=e^{3x}\cos 2x$

3 הוא שורש של פ"כ ולכן:

$y_{p_1}(x)=x\left(Ax^2+Bx+C\right)e^{3x}$

הפתרון הוא $y_2(x)=e^{3x}\sin 2x$

2 הוא שורש של פ"כ ולכן:

$y_{p_2}(x)=Dx\cos 2x+Ex\sin 2x$

סה"כ:

$y_p(x)=y_{p_1}(x)+y_{p_2}(x)=\left(Ax^2+Bx+C\right)e^{3x}+Dx\cos 2x+Ex\sin 2x$

ג) $y''+2y'+y=e^{-x}$

$r^2+2r+1=0$

$(r-1)^2=0$

$r_1=r_2=1$

הפתרון ההומוגני הוא $y_h(x)=Ae^{-x}+Bxe^{-x}$ כלומר e^{-x} הוא שורש מרכיב 2

לכן: $y_p(x)=Ax^2e^{-x}$

(5)

ד) $y''' - y'' - y' + y = 1$

$y''' - y'' - y' + y = 0$

$r^3 - r^2 - r + 1 = 0$

$(r-1)^2(r+1) = 0$

$r_1 = 1 \quad , \quad r_2 = 1 \quad , \quad r_3 = -1$

כלומר $g(x) = 1$, כלומר אנחנו על פתרון מהצורה:

$y_p(x) = A$

ה) $y^{(4)} - 2y'' + y = e^x$

$y^{(4)} - 2y'' + y = 0$

$r^4 - 2r^2 + 1 = 0$

$(r^2 - 1)^2 = 0$

$r_{1,2} = 1 \quad , \quad r_{3,4} = -1$

כלומר $g(x) = e^x$ כלומר 1 הינו שורש על פתרון מריבוי 2 לכן:

$y_p(x) = x^2 A e^x$

ו) $y''' + y' = x^3 + \sin 2x$

$y''' + y' = 0$

$r^3 + r = 0$

$r(r^2+1) = 0$

$r_1 = 0 \quad , \quad r_2 = i \quad , \quad r_3 = -i$

כלומר $g_1(x) = x^3$ כלומר 0 הינו שורש על פתרון מריבוי 1 לכן:

$y_{p_1}(x) = x\left(Ax^3 + Bx^2 + Cx + D\right)$

כלומר $g_2(x) = \sin 2x$ כלומר $2i$ אינו שורש על פתרון לכן:

$y_{p_2}(x) = E\cos 2x + F\sin 2x$

סה"כ:

$y_p(x) = y_{p_1} + y_{p_2} = x\left(Ax^3 + Bx^2 + Cx + D\right) + E\cos 2x + F\sin 2x$

ז) $y''' - y' = 2\sin x$

$y''' - y' = 0$

$r^3 - r = 0$

$$r(r^2-1)=0$$

$$r_1=0\ ,\quad r_2=1\ ,\quad r_3=-1$$

כלומר $g(x)=2\sin x$ אינו פתרון של הצד ימין:

$$y_p(x)=A\cos x+B\sin x$$

ו) $y'''-y''-y'+y=2e^{-x}+3$

$$y'''-y''-y'+y=0$$

$$r^3-r^2-r+1=0$$

$$(r^2-1)(r+1)=0$$

$$r_{1,2}=1\ ,\quad r=-1$$

כלומר $g_1(x)=2e^{-x}$ אינו פתרון של הצד ימין, מרבי 1 לכן

$$y_{p_1}(x)=Axe^{-x}$$

כלומר $g_2(x)=3$ אינו פתרון של הצד ימין:

$$y_{p_2}(x)=C$$

סה"כ:

$$y_p(x)=y_{p_1}+y_{p_2}=Axe^{-x}+C$$