משוואות דיפרנציאליות רגילות

פתרון תרגיל בית מס' 8

שאלה מס' (1):

נשתמש במשפט מאלמברט לגבי משוואות אוטונומיות עצמאיות על מנת למצוא משוואות דיפרנציאליות עבורן הפתרונות הנתונים הם מחזוריים.

כאן הפתרונות המחזוריים הנתונים אורתוגונליים, לכן מתקיים:

$$e^{ix_1} \cdot i_2 = x_{i_2} e^{\frac{x_2}{p}}$$

כלומר e^{ix_1} הינו וקטור עצמי שכן ע"ע i_2 ולכן הפונקציות הנתונות הן פתרונות מחזוריים.

שאלה מס' (2):

סעיף 1: נבדוק בפשטות בהתחלה $\begin{cases} y(0)=1 \\ y'(0)=1 \end{cases}$, ונראה פונקציה $y(x)$ שמקיימת את המשוואה ומקיימת גם את תנאי ההתחלה.

סעיף 2: נשים לב $y(-x)=y(x)$ ונניח כי $y(x)$ פותרת גם את המשוואה:

$$y'(-x) = -y'(x)$$

$$y''(-x) \cdot (-1) = y''(-x) = y''(x)$$

$$y''(x) \cdot (-1) = y''(x) \text{ כלומר}$$

כי $y(x)$ פונקציה נתונה (נתון).

סעיף 3: נראה נניח כי $y(x)$ מקיימת ב- $y(x)$, ונוכיח כי:

$$y(0)=1 \quad , \quad y'(0)=1$$

$$y'(0)=1-y(0) \quad , \quad y(0)=1-y'(0)$$

נשתמש בוורונסקיאן על מנת להוכיח שהפונקציות מהווה בקבוצה S:

$$W(y,y')(0) = \begin{vmatrix} y(0) & y'(0) \\ y'(0) & y''(0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2$$

הוורונסקיאן שונה משפט מכן שהפונקציות מקיימת.

(1)

משום כך אם y_1, y_2 הן פתרונות של המשוואה, אז גם $y_1 - y_2$ הוא פתרון של המשוואה ההומוגנית.

לכן $y_1 - y_2 = c_1 y_1 + c_2 y_2$ עבור c_1, c_2 מתאימים.

דוגמה 4: נתונה המשוואה $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$, והפתרונות $\{y_1, y_2\}$ כך ש- y_1 הוא פתרון צורני של המשוואה ו- y_2 הוא פתרון אי-צורני.

מצאו כי y_1 הוא פתרון צורני של המשוואה ומצאו פתרון אי-צורני y_2.

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = A$$

נתון:

$$y_2'(0) = y_1'(0) + y_2'(0) = 2$$

$$y_2'(0) - y_1'(0) = y_2'(0) = 0$$

$$y_1'(0) - y_1'(0) = y_2'(0) = 0$$

$$y_2'(x) = y_1'(x) - y_2'(x)$$

$$y_2'(0) = y_1'(0) + y_2'(0) = 2$$

מכאן נובע כי y_1, y_2 הן פתרונות בתחום שבו $W \neq 0$ ולכן הוורונסקיאן במקרה $x = 0$ שונה:

$$W(y_1, y_2)(0) = \begin{vmatrix} y_1(0) & y_2(0) \\ y_1'(0) & y_2'(0) \end{vmatrix} = y_1(0)y_2'(0) - y_1'(0)y_2(0) = 2$$

מכאן y_1, y_2 פתרונות בת-בסיס. נחשב את y_2:

$$y_2'' - y_2' - 6y_2 = (y_2'' + 4y_2' + 4y_2) - (y_2' + 2y_2) - 6y_2 = (y_2')' - y_2' - 6y_2$$

מכאן y_2 פתרון צורני.

$$y_2(x) = y_1(x) + y_2(x) = e^{2x}$$

שימו לב כיצד הפתרון הצורני מתרומם את המשוואה, ומקבלים:

$$y_2'' - y_2' - 6y_2 = (y_2'' + 4y_2' + 4y_2) - (y_2' + 2y_2) - 6y_2$$

ומכאן נובע:

$$y_2'' + 4y_2' + 4y_2 = y_2' + 2y_2$$

תהי משוואה מסדר n, נניח בה"כ תחת:

$$\begin{cases} y(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$ הן פתרונות בתחום שמכילות את המשוואה,

שאלה מס' (3):

נשתמש משוואת אוילר הומוגנית מסדר 2, פ"ל:

$$r(r-1)-3r+4 = r^2-4r+4 = (r-2)^2 = 0$$

$$\Rightarrow r_1 = r_2 = 2$$

נקבל פתרון כללי:

$$y(x) = C_1 \cdot x^2 + C_2 \cdot x^2 \ln|x|$$

נפתור ונשתמש בתנאי ההתחלה:

$$y(0) = 0 \qquad y'(0) = 0$$

מהנחה $C_2 = 0$ כי $\ln 0$ לא מוגדר.

נשים לב שגם הנגזרת מקיימת $y'(0) = 0$

הפתרון הוא $y(x) = C \cdot x^2$, כלומר:

שאלה מס' (4):

נתון:

$$\begin{cases} y'' - 2y' + y = xe^x + 4 \\ y(0) = y'(0) = 1 \end{cases}$$

נפתור הומוגנית:

$$y'' - 2y' + y = 0$$

$$r^2 - 2r + \frac{1}{4} = 0$$

$$(r-1)^2 = 0$$

$$\Rightarrow r_1, r_2 = 1$$

נקבל פתרון כללי של הומוגנית:

$$y_h(x) = C_1 e^x + C_2 \cdot x \cdot e^x$$

נמצא פתרון פרטי:

$$y_p = x^2(B_0 + B_1 x) \cdot e^x + B_2 = (B_0 x^2 + B_1 x^3)e^x + B_2$$

$$y_p' = (B_0 x^2 + B_1 x^3)e^x + (2B_0 x + 3B_1 x^2) \cdot e^x$$

$$y_p'' = (B_0 x^2 + B_1 x^3)e^x + (2B_0 x + 3B_1 x^2)e^x + (2B_0 x + 3B_1 x^2)e^x +$$

$$+ e^x(6B_1 x + 2B_0)$$

נציב במשוואה ונקבל:

$$(2B_0 + 6B_1 x)e^x + B_2 = xe^x + 4$$

$$\Rightarrow B_2 = 4$$

$$2B_0 = 0 \Rightarrow B_0 = 0$$

$$6B_1 = 1 \Rightarrow B_1 = \frac{1}{6}$$

לכן:

$$y_p(x) = \frac{1}{6}x^3e^x + 4$$

אין פתרון כללי:

$$y(x) = C_1e^x + C_2xe^x + \frac{1}{6}x^3e^x + 4$$

נציב תנאי:

$$y(0) = C_1 + 4 = 1 \Rightarrow C_1 = -3$$

$$y'(0) = C_1 + C_2 = 1 \Rightarrow C_2 = 4$$

לכן:

$$y(x) = -3e^x + 4xe^x + \frac{1}{6}x^3e^x + 4$$

ב/ $y^{(4)} - 4y'' = x^2 + e^x$

נפתור הומוגנית:

$$r^4 - 4r^2 = 0$$

$$r^2(r^2-4) = 0$$

$$r^2(r-2)(r+2) = 0$$

$$r_{1,2} = 0,\ r_3 = 2,\ r_4 = -2$$

לכן פתרון כללי של הומוגנית:

$$y_h(x) = C_1 + C_2x + C_3e^{2x} + C_4e^{-2x}$$

נמצא פתרון פרטי שנוכל:

$$y_p(x) = x^2(Ax^2+Bx+C) + De^x = Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + De^x$$

$$y_p'(x) = 4Ax^3 + 3Bx^2 + 2Cx + De^x$$

$$y_p''(x) = 12Ax^2 + 6Bx + 2C + De^x$$

$$y_p'''(x) = 24Ax + 6B + De^x$$

$$y_p^{(4)}(x) = 24A + De^x$$

נציב במשוואה ונשווה:

$$-48Ax^2 - 24Bx + (24A - 8C) - 3De^x = x^2 + e^x$$

$$-48A = 1 \Rightarrow A = -\frac{1}{48}$$

$$B = 0$$

$$24A - 8C = 0 \Rightarrow C = -\frac{1}{16}$$

$$-3D = 1 \Rightarrow D = -\frac{1}{3}$$

(4)

לכן הפתרון הכללי הוא:

$$y_p(x) = -\frac{1}{48}x^4 - \frac{1}{9}x^2 + \frac{1}{3}e^x$$

ופתרון כללי:

$$y(x) = c_1 + c_2 x + c_3 e^{2x} + c_4 e^{-2x} - \frac{1}{48}x^4 - \frac{1}{9}x^2 + \frac{1}{3}e^x$$

שאלה מס' (5):

נתון פתרון המשוואה $y(x)$

$$y^{(3)} + y'' - y' = e^{-x}$$

ומקיים:

$$\begin{cases} y(0) = y'(0) = 0 \\ y''(0) = \frac{1}{2} \\ \lim_{x\to\infty} y(x) = 0 \end{cases}$$

נפתור המשוואה: $r^3 + r^2 - r - 1 = 0$

נמצא כי $r = \pm 1$ הם שורשים ניכן:

$$(1+r)(1-r^2) = 1 - r - r^2 + r^3$$

כלומר: $r = 1$ שורש מריבוי 1

$r = -1$ שורש מריבוי 2

לכן פתרון כללי למשוואה:

$$y_h(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 x e^{-x}$$

נמצא פתרון פרטי מהצורה:

$$y_p(x) = x^2 A e^{-x}$$

$$y_p' = 2Axe^{-x} - Ax^2 e^{-x}$$

$$y_p'' = Ax^2 e^{-x} - 4Axe^{-x} + 2Ae^{-x}$$

$$y_p''' = -Ax^2 e^{-x} + 6Axe^{-x} - 6Ae^{-x}$$

נציב למשוואה:

$$-4Ae^{-x} = -e^{-x}$$

$$-4A = -1 \quad \Rightarrow \quad A = \frac{1}{4}$$

לכן:

$$y_p(x) = \frac{1}{4}x^2 e^{-x}$$

לכלומר הפתרון הכללי:

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 x e^{-x} + \frac{1}{4}x^2 e^{-x}$$

$\lim_{x\to\infty} y(x)=0$ מחייב $C_1=0$ כלומר:

$$y(x)=C_2e^{-x}+C_3xe^{-x}+\frac{1}{4}x^2e^{-x}$$

$$y(0)=0 \Rightarrow C_2=0$$

כלומר:

$$y(x)=C_3xe^{-x}+\frac{1}{4}x^2e^{-x}$$

$$y'(x)=C_3e^{-x}-C_3xe^{-x}+\frac{1}{2}xe^{-x}-\frac{1}{4}x^2e^{-x}$$

$$y'(0)=0 \Rightarrow C_3=0$$

כלומר: $y(x)=\frac{1}{4}x^2e^{-x}$

נוודא כי $y''(0)=\frac{1}{2}$:

$$y'(x)=\frac{1}{2}xe^{-x}-\frac{1}{4}x^2e^{-x}$$

$$y''(x)=\frac{1}{2}e^{-x}-\frac{1}{2}xe^{-x}-\frac{1}{2}xe^{-x}+\frac{1}{4}x^2e^{-x}$$

$$y''(0)=\frac{1}{2}$$ ✓

לכן אכן קיים פתרון יחיד שמקיים תנאי אלו והוא:

$$y(x)=\frac{1}{4}x^2e^{-x}$$

שאלה מס' (6):

א) משוואה $y'+p(x)\cdot y=q(x)$ היא משוואה לינארית מסדר ראשון עם מקדמים ממשיים רציפים (נתון) לכן מתקיים משפט קיום ויחידות.

עבור הפונקציה $f(x)=\cos x$, $g(x)=e^x$ בנקודה $x=0$

$$f(0)=1 \quad , \quad g(0)=1$$

כלומר דרך הנקודה $x=0$ עוברות שתי עקומות f ו- g וזה סתירה למשפט קיום ויחידות לכן א' לא נכון.

ב) אם פונקציות f ו- g הן פתרונות של המשוואה

$$(1)\quad x^2y''+axy'+by=0$$

אז לאחר הצבתן במשוואה קיבלנו מקדמים זהות.

נציב $g(x)=e^x$ ב- (1)

$$x^2e^x+axe^x+be^x=e^x(x^2+ax+b)\neq 0$$

הביטוי לא זהותית 0 ולכן ב' לא נכון.

ב) נקבל $y_1 = e^x$, $y_2 = \sin x$ במשוואה:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \quad (1)$$

ונקבל מערכת משוואות:

$$y_2'' = -q(x)y_2 + p(x)y_2'$$

$$\sin x = q(x)\sin x + p(x)\cos x$$

נעזר בדטרמיננטה:

$$\begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ e^x & e^x \end{vmatrix} = e^x(\sin x + \cos x) \neq 0$$

בקטע $(\frac{\pi}{2}, 0)$

מכאן ולפי משפט קיום ויחידות p ו- q הם פתרונות יחידים של המשוואה (1). ומכאן ש y_1 בלתי תלויה.

ג) אם p ו- q הן פתרונות של משוואה הומוגנית עם מקדמים קבועים אזי שורשי הפולינום האופייני

$$r_{1,2} = \pm i$$

$$r_3 = 1$$

והפולינום האופייני $(r+1)(r-i)(r+i) = 0$ הזה מסדר 3 ,

מכאן נובעת סדר המשוואה הנ"ל הינו כזה ש- p ו- q יהיו פתרונות המשוואה הנתונה ומסדר המשוואה הינו 3 לכן ניתן.

ד) נניח ש- p ו- q הן פתרונות של משוואה זו- הומוגנית מסדר 2.

ולפי $y_2 = \sin x - e^x$ הזו מתקיים על משוואה הומוגנית מסדר 2 אבל

סדר המשוואה $3 \geq n$ מכאן הינו לא ניתן .