משוואות דיפרנציאליות רגילות

תרגיל בית מס' 8

שאלה מס' 1:

בפתרון משוואות הומוגניות לינאריות עם מקדמים קבועים, אמרנו שמרחב הפתרונות עבור המשוואה כאשר $r_i, i \in \{1,...,n\}$ הם הערכים העצמיים הוא מהצורה $e^{r_1 x}, e^{r_2 x}, ..., e^{r_n x}$, אבל כשלמדנו על הוורונסקיאן הבנו שכדי ש $e^{r_1 x}, e^{r_2 x}, ..., e^{r_n x}$ יהוו מרחב פתרונות, הם צריכים להיות בת"ל.

הוכיחו כי הפונקציות $e^{r_1 x}, e^{r_2 x}, ..., e^{r_n x}$ כאשר $r_i \neq r_j$ עבור $i \neq j$ הן פונקציות בלתי תלויות לינארית.

שאלה מס' 2:

נתונה המשוואה $y'' = U(x) \cdot y$ כאשר $U(x)$ היא פונקציה רציפה. הוכיחו כי אם $U(x)$ היא פונקציה זוגית אז ניתן למצוא בסיס $\{y_1, y_2\}$ למרחב הפתרונות של המשוואה (כלומר שתי פונקציות בת"ל שפותרות את המשוואה) שבו y_1 היא פונקציה זוגית ו- y_2 היא פונקציה אי-זוגית.

שאלה מס' 3:

מצאו את כל הפתרונות של הבעיה הבאה:

$$\begin{cases} x^2 y'' - 3xy' + 4y = 0 \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$$

שאלה מס' 4:

תפתרו את הסעיפים הבאים בשיטת השוואת מקדמים:

א. $\begin{cases} y'' - 2y' + y = x \cdot e^x + 4 \\ y(0) = y'(0) = 1 \end{cases}$.

ב. $y^{(4)} - 4y'' = x^2 + e^x$.

שאלה מס' 5:

יהי $y(x)$ פתרון המשוואה $y''' + y'' - y' - y = -e^{-x}$ המקיים את התנאים:

$$\begin{cases} y(0)=y'(0)=0 \\ y''(0)=\frac{1}{2} \\ \lim_{x\to\infty} y(x)=0 \end{cases}$$

להראות שקיים פתרון אחד שמקיים את התנאים הנ"ל.

שאלה מס' 6:

בהינתן הפונקציות $\begin{cases} f(x)=\cos(x) \\ g(x)=e^x \end{cases}$ מצאו את התשובה הנכונה והוכיחו למה היא נכונה, בנוסף גם הראו למה שאר התשובות אינן נכונות.

א. קיימת משוואה $y'+p(x)y=q(x)$ (כאשר הפונקציות $p(x),q(x)$ הן פונקציות רציפות על כל הישר), שהפונקציות $f(x),g(x)$ הן פתרונות שלה.

ב. קיימת משוואה $x^2y''+axy'+by=0$ עם מקדמים a,b ממשיים קבועים שונים מאפס, שהפונקציות $f(x),g(x)$ הן פתרונות שלה.

ג. קיימת משוואה $y''+p(x)y'+q(x)y=0$ (כאשר הפונקציות $p(x),q(x)$ הן פונקציות רציפות באינטרוול $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$), שהפונקציות $f(x),g(x)$ הן פתרונות שלה.

ד. קיימת משוואה לינארית הומוגנית מסדר 2 עם מקדמים קבועים ממשיים שונים מאפס שהפונקציות $f(x),g(x)$ הן פתרונות שלה.

ה. קיימת משוואה לינארית אי-הומוגנית מסדר 2 עם מקדמים קבועים ממשיים שונים מאפס שהפונקציות $f(x),g(x)$ הן פתרונות שלה.

בהצלחה