$$y(x) = 2 - 2\cos x + \sin x$$

שאלה מס' (2):

$$y = v \cdot \frac{1}{x}$$

$$y' = v' \cdot \frac{1}{x} - v \cdot \frac{1}{x^2}$$

$$y'' = v'' \cdot \frac{1}{x} - 2v' \cdot \frac{1}{x^2} + 2v \frac{1}{x^3}$$

מציבים במשוואה ההומוגנית:

$$x^2 v'' \cdot \frac{1}{x} - x^2 2v' \frac{1}{x^2} + x^2 v \frac{1}{x^3} - 3x\left(v' \frac{1}{x} - v \frac{1}{x^2}\right) + 5v \frac{1}{x} = x^3$$

$$xv'' + v'(-2-3) + v\left(\frac{2}{x} + \frac{3}{x} - \frac{5}{x}\right) = x^3$$

$$xv'' - 5v' = x^3$$

נסמן: $t = v'$ ונקבל:

$$t' - \frac{5}{x} t = x^2$$

$$\mu(x) = e^{\int -\frac{5}{x} dx} = e^{-5\ln x} = \frac{1}{x^5}$$

$$\left(t \cdot x^{-5}\right)' = x^{-3}$$

$$t \cdot x^{-5} = -\frac{1}{2} x^{-2} + C_1$$

$$t = C_1 \cdot x^5 - \frac{1}{2} x^3 = v'$$

$$v = C_1 x^6 - \frac{x^4}{8} + C_2$$

$$y = C_1 x^5 + \frac{C_2}{x} - \frac{x^3}{8}$$

(2)

שאלה מס (3):

$$y_h = C_1 + C_2x + C_3\cdot x^2 + C_4\cdot e^{-x}\cdot\sin(2x) + C_5\cdot e^{-x}\cdot\cos(2x) =$$

$$= e^{0\cdot x}\cdot C_1 + x\cdot C_2\cdot e^{0\cdot x} + x^2\cdot C_3\cdot e^{0\cdot x} + e^{-1\cdot x}\cdot C_4\cdot\sin(2x) + e^{-1\cdot x}\cdot C_5\cdot\cos(2x)$$

מהפתרון הכללי y_h:

$$r_1 = r_2 = r_3 = 0 \quad , \quad r_{4,5} = -1 \pm 2i$$

נמצא משוואה ממעלה שניה שמקיימת את השורשים (שכן אחד הבסיסי שלנו)

שהיא $r_{4,5}$ הם השורשים:

$$\left[r-(-1+2i)\right]\cdot\left[r-(-1-2i)\right] = r^2 + Br + C$$

$$B = -2\mathrm{Re}\{r_4\} = -(r_4 + \bar{r}_4) \quad \Rightarrow \quad B = 2$$

$$C = r_4\cdot\bar{r}_4 = |r_4|^2 = 4+1 \quad \Rightarrow \quad C = 5$$

לכן הפולינום האופייני הינו:

$$r^5 + 2r^4 + 5r^3 = r^3\left(r^2+2r+5\right) = 0$$

והמשוואה הדיפרנציאלית:

$$y^{(5)} + 2y^{(4)} + 5y^{(3)} = 0$$

שאלה מס (4):

$$y'' + \lambda y = 0$$

$$y(0) = y(\pi) = 0$$

$$r^2 + \lambda = 0$$

1) אם $\lambda < 0$ אז $r = \pm\sqrt{\lambda}$

$$y = C_1\cdot\cosh(\sqrt{\lambda}x) + C_2\cdot\sinh(\sqrt{\lambda}x)$$

$$y(0) = C_1 = 0$$

$$y(\pi) = C_2\cdot\sinh(\pi\sqrt{\lambda}) = 0$$

מכאן: או $C_2 = 0$ או $\sinh(\pi\sqrt{\lambda}) = 0$

או $C_2 = 0$

פתרון: $\lambda = n^2$ כאשר $n = 0, 1, 2, \ldots$

או $C_2 = 0$

אין כל ערכי $\lambda = n^2$ ו סרבון על פתרון טריוויאלי.

ב) $\lambda=0$ אז $r^2=0$

$$r_{1,2}=0$$

$$y=c_1+c_2x$$

$$y(0)=c_1=0$$

$$y(\pi)=c_2\pi=0 \quad \Leftarrow \quad c_2=0$$

$$y\equiv 0 \quad \Leftarrow$$

אין ערכים עצמיים שליליים.

ג) $\lambda>0$ אז $\lambda=-\gamma^2$ נסמן $\gamma>0$ ונקבל:

$$r^2-\gamma^2=0$$

$$r_1=\gamma \quad , \quad r_2=-\gamma$$

הפתרון הכללי:

$$y=c_1e^{\gamma x}+c_2e^{-\gamma x}$$

$$y(0)=c_1+c_2=0 \quad \Leftarrow \quad c_2=-c_1$$

$$y(\pi)=c_1e^{\gamma\pi}-c_1e^{-\gamma\pi}=0$$

$$\Leftarrow \quad c_1\left(e^{\gamma\pi}-e^{-\gamma\pi}\right)=0$$

$$\Leftarrow \quad c_1=0$$

אזי $c_2=0$

$$\Leftarrow \quad y\equiv 0$$

אין ערכים עצמיים שליליים (כאשר $\lambda<0$) שעבורם קיים פתרון שאינו כ"ש.

שאלה מס' (5):

$$y^{(4)}-2y^{(3)}+3y''-2y'+y=0$$

$$r^4-2r^3+3r^2-2r+1=0$$

$$(r^2-r+1)\cdot(r^2-r+1)=0$$

$$(r^2-r+1)^2(r-1)=0$$

$$r_{1,2}=\frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2} \quad , \quad r_3=1$$

לכן הפתרון הכללי:

$$y(0) = C_1 + C_3 = \alpha$$

$$y'(x) = C_1 e^x + C_2 e^x + C_2 x e^x - C_3 \sin x + C_4 \cos x$$

$$y'(0) = C_1 + C_2 + C_4 = \beta$$

$$y''(x) = C_1 e^x + 2C_2 e^x + C_2 x e^x - C_3 \cos x - C_4 \sin x$$

$$y''(0) = C_1 + 2C_2 - C_3 = \gamma$$

ונקבל:

$$\begin{cases} C_1 + C_3 = \alpha \\ C_1 + C_2 + C_4 = \beta \\ C_1 + 2C_2 - C_3 = \gamma \end{cases}$$

כאן לפתרון המטריצה מתקיים $C_1 = C_2 = 0$ ולכן:

$$\begin{cases} C_3 = \alpha \\ C_4 = \beta \\ -C_3 = \gamma \end{cases}$$

ולכן $\alpha + \gamma = 0$ אז $\gamma = -\alpha$ ולכן המשוואה הנתונה היא ל.ר.

שאלה מס' (9):

נוכיח תחילה על פתרון המשוואה השונה את מקבלת הצורה:

$$y(x) = x^{\frac{1-5}{2}} e^{\alpha x} \left(\sin(\beta x) + \cos(\beta x) \right)$$

שורש 5 הינו הפתרון של אחד $\beta i + \alpha = r$, אז:

$$\beta = 1 \quad , \quad \alpha = 0 \quad , \quad 5 = \text{לכן}$$

אחד $i \pm = r$ שורש מרובה 9 ולכן הפולינום האופייני הינו:

$$1 = 9(1 + r^2)$$

$$= 0 = 1 + 2r^2 + 3r^4 + 4r^6 + 5r^8 + 6r^{10} + 7r^{12}$$

לכן נוכל להסיק על המשוואה הינו 12.