משוואות דיפרנציאליות רגילות

פתרון תרגיל בית מס' 7

שאלה מס' (1):

א) $y'' - 64y = 0$.

נציב $y = e^{kx}$ ונקבל:

$$\begin{cases} y' = k \cdot e^{kx} \\ y'' = k^2 e^{kx} \end{cases}$$

$$k^2 e^{kx} - 64 e^{kx} = 0$$

$$\Rightarrow \quad k^2 - 64 = 0$$

$$\Rightarrow \quad k^2 = 64$$

$$\Rightarrow \quad k = \pm 8$$

ולכן: $y_1(x) = e^{8x}$

$y_2(x) = e^{-8x}$

$y(x) = C_1 e^{8x} + C_2 e^{-8x}$

ב) $y'' + 7y' + 6y = 0$

נפתרון הכללי:

משוואה אופיינית:

$$k^2 + 7k + 6 = 0$$

$$(k+6)(k+1) = 0$$

$$y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-6x}$$

נפתרון הכללי:

ג)
$$\begin{cases} y'' + 9y = 0 \\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 \\ y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \end{cases}$$

משוואה אופיינית:

$$k^2 + 9 = 0$$

$$k^2 = -\frac{1}{9}$$

$$k = \pm \frac{1}{3} \cdot i$$

ולכן: $y_1(x) = \cos\left(\frac{1}{3}x\right)$

$y_2(x) = \sin\left(\frac{1}{3}x\right)$

ונציב בכלל: $y(x) = C_1 \cdot \cos\left(\frac{1}{3}x\right) + C_2 \cdot \sin\left(\frac{1}{3}x\right)$

נקבל תנאי התחלה: $y\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 2$

$$2 = C_1 \cdot \underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{0} + C_2 \cdot \underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{1}$$

$$\Rightarrow C_2 = 2$$

נגזור את הפתרון ונציב תנאי התחלה $y'\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0$

$$y'(x) = -\frac{C_1}{3}\sin\left(\frac{1}{3}x\right) + \frac{C_2}{3}\cos\left(\frac{1}{3}x\right)$$

$$0 = -\frac{C_1}{3}\underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{1} + \frac{C_2}{3}\underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{0}$$

$$\Rightarrow C_1 = 0$$

לכן הפתרון הפרטי הוא:

$$y(x) = 2\cdot\sin\left(\frac{1}{3}x\right)$$

ב) $y^{(4)} - 13y'' + 36y = 0$

המשוואה האופיינית:

$$k^4 - 13k^2 + 36 = 0$$

נסמן: $t = k^2$ ונקבל

$$t^2 - 13t + 36 = 0$$

$$(t-9)(t-4) = 0$$

$t = 9$ ← $k_1 = 3$, $k_2 = -3$

$t = 4$ ← $k_3 = 2$, $k_4 = -2$

לכן הפתרון הכללי:

$$y(x) = C_1 \cdot e^{3x} + C_2 \cdot e^{-3x} + C_3 \cdot e^{2x} + C_4 \cdot e^{-2x}$$

ג) $y''' - 2y'' + y' = 0$

משוואה אופיינית:

$$k^3 - 2k^2 + k = 0$$
$$k(k^2 - 2k + 1) = 0$$
$$k(k-1)^2 = 0$$

ולכן הפתרון הכללי:

$$y(x) = C_1 + C_2 \cdot e^x + C_3 \cdot x \cdot e^x$$

ו)
$$\begin{cases} 3y'' - 6y' + 30y = 0 \\ y\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0 \\ y'\left(\frac{\pi}{6}\right) = e^{\frac{\pi}{6}} \end{cases}$$

משוואה אופיינית:

$$3k^2 - 6k + 30 = 0 \quad /:3$$
$$k^2 - 2k + 10 = 0$$
$$k_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 40}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-36}}{2} = \frac{2 \pm 6i}{2} = 1 \pm 3i$$

והפתרון הכללי:

$$y(x) = C_1 e^x \cdot \cos(3x) + C_2 \cdot e^x \cdot \sin(3x)$$

נציב תנאי התחלה $y\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0$

$$0 = y\left(\frac{\pi}{6}\right) = C_1 \cdot e^{\frac{\pi}{6}} \cdot \underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{0} + C_2 \cdot e^{\frac{\pi}{6}} \cdot \underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{1}$$

$$\Rightarrow C_2 = 0$$

נגזור את הפתרון ונציב תנאי התחלה נוסף $y'\left(\frac{\pi}{6}\right) = e^{\frac{\pi}{6}}$

$$y'(x) = C_1 e^x \cos(3x) - 3C_1 e^x \sin(3x) + C_2 e^x \sin(3x) + 3C_2 e^x \cos(3x)$$

$$e^{\frac{\pi}{6}} = y'\left(\frac{\pi}{6}\right) = C_1 e^{\frac{\pi}{6}} \underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{0} - 3C_1 e^{\frac{\pi}{6}} \cdot \underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{1} + C_2 e^{\frac{\pi}{6}} \cdot \underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{1} + 3C_2 e^{\frac{\pi}{6}} \cdot \underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{0}$$

$$e^{\frac{\pi}{6}} = -3C_1 e^{\frac{\pi}{6}} + C_2 e^{\frac{\pi}{6}} \quad / : e^{\frac{\pi}{6}}$$

$$1 = -3C_1 \Rightarrow C_1 = -\frac{1}{3}$$

ולכן הפתרון הוא:

$$y(x) = -\frac{1}{3} e^x \sin(3x)$$

ג) $y^{(4)} - 16y = 0$

משוואה אופיינית: $k^4 - 16 = 0$

$k^4 = 16$

$k_1 = 2 \;,\; k_2 = -2 \;,\; k_3 = 2i \;,\; k_4 = -2i$

הפתרון הכללי:

$$y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} + C_3 \cos(2x) + C_4 \sin(2x)$$

ו) $y^{(8)} + 18y^{(4)} + 81y = 0$

משוואה אופיינית: $k^8 + 18k^4 + 81 = 0$

נסמן $t = k^4$ ונקבל:

$t^2 + 18t + 81 = 0$

$(t+9)(t+9) = 0$

$\Rightarrow \quad k^4 = -9$

$$r_k = \sqrt[4]{9}\left(\cos\left(\frac{\pi + 2\pi k}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi + 2\pi k}{4}\right)\right) \qquad k = 0,1,2,3$$

$k=0$: $r_0 = \sqrt[4]{9}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt[4]{9}\cdot\sqrt{2}}{2}\cdot(i+1)$

$k=1$: $r_1 = \frac{\sqrt[4]{9}\cdot\sqrt{2}}{2}(i-1)$

$k=2$: $r_2 = \frac{\sqrt[4]{9}\cdot\sqrt{2}}{2}\cdot(-i-1)$

$k=3$: $r_3 = \frac{\sqrt[4]{9}\cdot\sqrt{2}}{2}\cdot(-i+1)$

הפתרון הכללי:

$$y(x) = C_1 e^{\frac{\sqrt{6}}{2}x}\cos\left(\frac{\sqrt{6}}{2}x\right) + C_2\cdot x\cdot e^{\frac{\sqrt{6}}{2}x}\cos\left(\frac{\sqrt{6}}{2}x\right) + C_3\cdot e^{\frac{\sqrt{6}}{2}x}\sin\left(\frac{\sqrt{6}}{2}x\right) +$$
$$+ C_4 x e^{\frac{\sqrt{6}}{2}x}\cdot\sin\left(\frac{\sqrt{6}}{2}x\right) + C_5 e^{\frac{-\sqrt{6}}{2}x}\cos\left(\frac{\sqrt{6}}{2}x\right) + C_6\cdot x e^{\frac{-\sqrt{6}}{2}x}\cos\left(\frac{\sqrt{6}}{2}x\right) +$$
$$+ C_7\cdot e^{\frac{-\sqrt{6}}{2}x}\cdot\sin\left(\frac{\sqrt{6}}{2}x\right) + C_8 e^{\frac{-\sqrt{6}}{2}x}\cdot x\cdot\sin\left(\frac{\sqrt{6}}{2}x\right)$$

ב/
$$\begin{cases} y''' - 3y'' + 3y' - y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 2 \\ y''(0) = 3 \end{cases}$$

משוואת אופיינית:

$$k^3 - 3k^2 + 3k - 1 = 0$$

$$\Rightarrow (k-1)^3 = 0$$

שורש הפתרון הכללי:

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 x e^x + C_3 x^2 e^x$$

$$1 = y(0) = C_1 \Rightarrow C_1 = 1$$

נגזרת ראשונה של הפתרון:

$$y'(x) = C_1 e^x + C_2 e^x + C_2 x e^x + 2C_3 x e^x + C_3 x^2 e^x$$

$$2 = y'(0) = C_1 + C_2$$

$$\Rightarrow 2 = 1 + C_2 \Rightarrow C_2 = 1$$

נגזרת שנייה:

$$y'(x) = e^x + e^x + x e^x + 2C_3 x e^x + C_3 x^2 e^x$$

$$y''(x) = 2e^x + e^x + x e^x + 2C_3 e^x + 2C_3 x e^x + 2C_3 x e^x + C_3 x^2 e^x$$

$$3 = y''(0) = 2 + 1 + 2C_3$$

$$\Rightarrow C_3 = 0$$

שורש הפתרון הכללי:

$$y(x) = e^x + x e^x = e^x (x+1)$$

א/
$$y^{(4)} - y^{(7)} = 0$$

משוואת אופיינית:

$$k^4 - k^7 = 0$$

$$k^4 (k^3 - 1) = 0$$

$k_1 = 0$ שורש מריבוי 4

$$k^3 = 1$$

$$k_2 = 1$$

$$k_3 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$k_4 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

ולכן הפתרון הכללי:

$$y(x) = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 x^3 + C_5 e^{x} + C_6 e^{-\frac{x}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + C_7 e^{-\frac{x}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$$

ג/ $y^{(6)} - 12y^{(4)} + 48y'' - 64 = 0$

משוואת האופיינית:

$$k^6 - 12k^4 + 48k^2 - 64 = 0$$

נסמן $t = k^2$ ונקבל:

$$t^3 - 12t^2 + 48t - 64 = 0$$

$$\Rightarrow (t-4)^3 = 0$$

$$\Rightarrow (k^2-4)^3 = 0$$

$$\Rightarrow (k-2)^3(k+2)^3 = 0$$

$k_1 = 2$ מרבי 3 , $k_2 = -2$ מרבי 3

ולפיכך הפתרון הכללי:

$$y(x) = e^{2x}\left(C_1 + C_2 x + C_3 x^2\right) + e^{-2x}\left(C_4 + C_5 \cdot x + C_6 \cdot x^2\right)$$

ד/

$$\begin{cases} y''' + y' = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \\ y''(0) = 2 \end{cases}$$

משוואת האופיינית:

$$k^3 + k = 0$$

$$\Rightarrow k(k^2+1) = 0$$

$$k_1 = 0$$

$$k^2 + 1 = 0 \Rightarrow k^2 = -1 \Rightarrow k_2 = i$$

$$k_3 = -i$$

ולכן בפתרון כללי:

$$y(x) = C_1 + C_2 \cdot \cos(x) + C_3 \cdot \sin(x)$$

$$0 = y(0) = C_1 + C_2$$

$$y'(x) = -C_2 \sin(x) + C_3 \cdot \cos x$$

$$y''(x) = -C_2 \cos(x) - C_3 \sin(x)$$

$1 = y'(0) = C_3$

$2 = y''(0) = -C_2$

$\Rightarrow \quad C_1 + C_2 = 0$

$C_1 - 2 = 0$

$C_1 = 2$

לכן הפתרון הוא:

$$y(x) = 2 - 2\cos x + \sin x$$

שאלה מס' (2):

(2)

הוכיחו שמספר 3 שקיימת בקטע בהכרח $(-9,3)$.

שמתלכדת עבור ערך יחידי. נתון $f(x)=3$ רק וכל נקודות פתרון שמקיימת למשוואה

כך $x_0=\frac{1}{2}$. בנוסף $x_0\neq(-9,3)$ ונקודת הפתרון שמקיים ומוגדרת

נקודות שבי פתרונות שונות שמקיימות הוא 3 ולפי הנתון שמקיים מספר 3

$$0=\left(\frac{1}{2}\right)''f \quad \text{כי} \quad 0=f'(x)\cdot 3^2+f''(x)\cdot f(x)\cdot 9+f''(x)\cdot 3^2=\left(\frac{1}{2}\right)''f$$

$$0=\left(\frac{1}{2}\right)'f \quad \text{כי} \quad 0=f'(x)\cdot 3^2+f''(x)\cdot f(x)\cdot 3=\left(\frac{1}{2}\right)'f$$

נניח $f(x)=3^2$ פתרון אחר.

ברור שגם כי שמתלכדת הנתונות שמקיים שמקיים קיום פתרון שלישי $f\equiv 1$.

מספר 3 שמקיימת נקודת שמקיים $(-9,3)$.

לכן: שהן מקיימות פתרון שמקיים הנתונות $f(x)=3$ נתון $f(\frac{1}{2})=0$

שאלה מס' (3):

שהן x^2, xe^x פתרונות שמתלכדת שונות עבור כל x.

$$W(f_1,f_2)=\begin{vmatrix} e^x & xe^x \\ e^x & (x+1)e^x \end{vmatrix}=e^{2x}\neq 0$$

עבור כל x

(עתה נחשב את הוורונסקיאן:

$$0=x^2\cdot x+(x+1)x^2-(x+2)x^2$$

עבור f_3:

$$0=x^2+x^2-2x^2$$

נ"ש, עבור f_3:

$$f_3''=\underbrace{x^2(x+2)}+x^2=\underbrace{x^2\cdot x+x^2}_{x^2(x+1)}+x^2 \quad , \quad f_3'=\underbrace{x^2\cdot x+x^2}_{x^2(x+1)} \quad , \quad f_3=x^2x$$

נבדוק אכן הפתרונות שנ"ל נכונה במשוואה:

$$f_1=e^x \quad , \quad f_1'=e^x \quad , \quad f_1''=e^x$$

אכן שניהם יוצרים מספרונות בשאלתך.

שאלה מס' (4): נתבונן תחת פתרונות ס"ה בלבד במשוואה!

$y_1 = \sqrt{x}$, $y_1' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $y_1'' = \frac{-1}{4x^{\frac{3}{2}}}$

$y_2 = 1$, $y_2' = 0$, $y_2'' = 0$

עבור y_1:

$$\sqrt{x}\cdot\left(-\frac{1}{4x^{\frac{3}{2}}}\right) + \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^2 - \frac{1}{4x} = 0$$

עבור y_2:

$$1\cdot 0 + 0^2 = 0$$

נתבונן תחת $z = c_1 + c_2\sqrt{x}$ פתרון:

$$z = c_1 + c_2\sqrt{x} \quad , \quad z' = \frac{c_2}{2\sqrt{x}} \quad , \quad z'' = -\frac{c_2}{4x^{\frac{3}{2}}}$$

נציב במשוואה:

$$\left(-\frac{c_2}{4x^{3/2}}\right)\cdot(c_1 + c_2\sqrt{x}) + \left(\frac{c_2}{2\sqrt{x}}\right)^2 =$$

$$= -\frac{c_1c_2}{4x^{\frac{3}{2}}} - \frac{c_2^2}{4x} + \frac{c_2^2}{4x} = -\frac{c_1c_2}{4x^{\frac{3}{2}}} \neq 0$$

מכיוון שאחרת הפתרונות <u>אינה תלויה לינארית</u> אז הפתרון הכללי של המשוואה הינו, נתון בצורה הבאה: $c_2y_2 + c_1y_1$ אינו מהווה פתרון למשוואה זו.

שאלה מס' (5):

א) נתבונן תחת פתרונות אלו בלבד:

$y_1 = 1$, $y_1' = 0$, $y_1'' = 0$, $y_1''' = 0$

$y_2 = x$, $y_2' = 1$, $y_2'' = 0$, $y_2''' = 0$

$y_3 = x^3$, $y_3' = 3x^2$, $y_3'' = 6x$, $y_3''' = 6$

עבור y_1:

$$0 - 0 + 0\cdot x \quad \checkmark$$

עבור y_2:

$$0 - 0 + 0\cdot x \quad \checkmark$$

עבור y_3:

$$6x - 6x + 0\cdot x \quad \checkmark$$

ג) דרך I:

$$W(y_1,y_2,y_3) = \begin{vmatrix} x^3 & x & 1 \\ 3x^2 & 1 & 0 \\ 6x & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= x^3(0-0) - x(0-0) + 1(0-6x) = -6x$$

דרך II: נעשה את זה

$$W(x) = C\cdot e^{-\int \frac{1}{x}} = C\cdot e^{\ln x} = Cx$$

ד) $W(x)=0$ כאשר $x=0$. כלומר יש פה בעיה שהוראה אחרי הגבול הינה:

$$y''' - \frac{1}{x}\cdot y'' = 0$$

כלומר המקדמים של המשוואה שוב בלתי מוגדרים ב- 0. תמיד שוב קורה המצב הבעייתי שהורונסקיאן משתווה לאפס בנוסף על שוב, שוב מצאנו שהורונסקיאן משתווה לאפס רק בנקודה מסוימת $x=0$.

אך מכיוון שמצאנו שמקדמי המשוואה אינם רציפים ב- 0 כלל אין שום סיבה שנצפה שיתקיימו הקשרים של הורונסקיאן.