# משוואות דיפרנציאליות רגילות

## פתרון תרגיל 5

**פתרון שאלה 1:**

שאלה מס' (3):

נגדיר $h(x)=y(x+1)$ ונבחר כי $h(x)$ מקיימת את אותה משוואה דיפרנציאלית:

$$h'(x)=y'(x+1)$$

הפונקציה $y(x)$ היא פתרון של המשוואה, כלומר מקיימת אותה עבור כל $x$ בפרט עבור $x+1$, ולכן:

$$y'(x+1)=\sin^2(\pi(x+1))\cdot y^2(x+1)+y(x+1)$$

מתקיים:

$$\sin^2(\pi(x+1))=\sin^2(\pi x)$$

כי $\sin$ פונ' אי-זוגית.

בנוסף: $h^2(x)=y^2(x+1)$ , $h(x)=y(x+1)$

אז נשלב ונקבל:

$$h'(x)=\sin^2(\pi x)\cdot h^2(x)+h(x)$$

אז $h(x)$ מקיימת את אותה משוואה, ומקיים:

$$h(0)=y(1)=y(0)$$

נתון

כלומר $h(x)$, $y(x)$ פתרונות אותה משוואה ומקיימים אותו תנאי התחלה.

במו כן תנאי משפט קיום ויחידות מתקיים כי הפונקציה

$$f(x,y)=\sin^2(\pi x)\cdot y^2+y$$

היא פונקציה חלקה בשני משתנים, לכן:

$$y(x)=h(x)=y(x+1)$$

לכן $y(x)$ היא פונקציה מחזורית עם מחזוריות 1.

**פתרון שאלה 2:**

שאלה מס' (4):

נוכיח תחילה שהפונקציה $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ ואינטגרל זה מתכנס (מהגדרה) לפי מבחן ההשוואה נקבל כי: $\forall x\in\mathbb{R}\ \ f(x)>0$ ו- $\frac{1}{1+x^2}\le 1$ ולכן מהשוואה לאינטגרל $\int_0^\infty 1\,dx$ שמתכנס ברור שגם האינטגרל המקורי מתכנס לפי מבחן ההשוואה.

נחשב את האינטגרל ונראה שהוא שווה $\frac{\pi}{2}$:

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}dx=\lim_{t\to\infty}\int_0^t \frac{1}{1+x^2}dx=\lim_{t\to\infty}\arctan(x)\Big|_0^t=\lim_{t\to\infty}\arctan(t)-\arctan(0)=\frac{\pi}{2}$$

נוכיח כעת כי $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+x^2}dx=\frac{\pi}{2}$ באופן דומה לחישוב הקודם:

$$\int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+x^2}dx=\lim_{t\to-\infty}\int_t^0 \frac{1}{1+x^2}dx=\lim_{t\to-\infty}\arctan(x)\Big|_t^0=\lim_{t\to-\infty}\arctan(0)-\arctan(t)=\frac{\pi}{2}$$

ולכן האינטגרל המקורי מתכנס ושווה $\pi$.

נוכיח כעת כי $\int_{-\infty}^\infty \frac{x}{1+x^2}dx$ מתכנסת בהחלט ולכן מתכנסת:

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{x}{1+x^2}dx=\int_{-\infty}^0 \frac{x}{1+x^2}dx+\int_0^\infty \frac{x}{1+x^2}dx$$

נחשב את האינטגרל הראשון:

$$\int_{-\infty}^0 \frac{x}{1+x^2}dx=\lim_{t\to-\infty}\int_t^0 \frac{x}{1+x^2}dx=\lim_{t\to-\infty}\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\Big|_t^0=\lim_{t\to-\infty}\frac{1}{2}\ln(1)-\frac{1}{2}\ln(1+t^2)=-\infty$$

ולכן האינטגרל המקורי מתבדר.

נוכיח כעת כי $\int_{-\infty}^\infty \frac{x}{1+x^2}dx$ מתכנסת בערך קושי ונחשב את ערכה.

נשים לב כי $f(x)=\frac{x}{1+x^2}$ היא פונקציה אי-זוגית ולכן $\int_{-a}^a f(x)dx=0$ לכל $a\in\mathbb{R}$ ומכאן שגם $\lim_{a\to\infty}\int_{-a}^a f(x)dx=0$ ולכן האינטגרל מתכנס בערך קושי וערכו הוא 0.

נוכיח כי $\int_{-\infty}^\infty \frac{x}{1+x^2}dx$ מתכנסת בערך קושי ונחשב את ערכה.

נשים לב כי $f(x)=\frac{x}{1+x^2}$ היא פונקציה אי-זוגית ולכן $\int_{-a}^a f(x)dx=0$ לכל $a\in\mathbb{R}$ ומכאן שגם $\lim_{a\to\infty}\int_{-a}^a f(x)dx=0$ ולכן האינטגרל מתכנס בערך קושי וערכו הוא 0.

נוכיח כעת כי $\int_{-\infty}^\infty \frac{x}{1+x^2}dx$ מתכנסת בהחלט ולכן מתכנסת:

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{x}{1+x^2}dx=\int_{-\infty}^0 \frac{x}{1+x^2}dx+\int_0^\infty \frac{x}{1+x^2}dx$$

נחשב את האינטגרל הראשון:

$$\int_{-\infty}^0 \frac{x}{1+x^2}dx=\lim_{t\to-\infty}\int_t^0 \frac{x}{1+x^2}dx=\lim_{t\to-\infty}\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\Big|_t^0=\lim_{t\to-\infty}\frac{1}{2}\ln(1)-\frac{1}{2}\ln(1+t^2)=-\infty$$

ולכן האינטגרל המקורי מתבדר.

**פתרון שאלה 3:**

ברור כי המשוואה מקיימת תנאי משפט קיום ויחידות ולכן פתרונות שונים לא נחתכים , בנוסף קל לראות כי $y \equiv 0, y = x^2 + 6$ הם פתרונות למשוואה שאינם מקיימים תנאי התחלה ולכן שונים מהפתרון שלנו , וכעת מתקיים: $0 < y(x) < x^2 + 6 < x^2 + 17$ .

**פתרון שאלה 4:**

המשוואה מקיימת תנאי משפט קיום ויחידות ולכן פתרונות שונים לא נחתכים, ורואים כי $y \equiv 2, y \equiv 3$ הם פתרונות סנגולריים השונים מהפתרון $y(x)$ שמקיים תנאי ההתחלה הנתון ($2 < y_0 < 3$) ולכן פתרון זה אכן מקיים $2 < y(x) < 3$ .

אם נבדוק שדה כיוונים של המשוואה בין הישרים $y \equiv 2, y \equiv 3$ נראה שהוא מקבל ערך שלילי לכל $x \in \mathbb{R}$ ולכן $\lim_{x \to +\infty} y(x) = 2$ .

**פתרון שאלה 5:**

אגף שמאל של המשוואה הנתונה תמיד גדול או שווה אפס לעומת זאת אגף ימין שלילי ולכן אין לה פתרון בכלל.