משוואות דיפרנציאליות רגילות

תרגיל בית מס' 5

שאלה מס' 1:

נתונה המשוואה $y'=\sin^4(x\pi)y^2+y$. נתון גם כי $y(x)$ הוא פתרון למשוואה המוגדר לכל $x\in\mathbb{R}$, ונתון כי $y(0)=y(1)$. הוכח כי $y(x)$ היא פונקציה מחזורית עם מחזוריות 1.

תזכורת: אם $y(x)$ היא פונקציה מחזורית עם מחזוריות 1 אז היא צריכה לקיים $y(x)=y(x+1)$.

שאלה מס' 2:

נתונה המשוואה $y'=-\arctan\left(x^2+y^2\right)\cdot y\cdot x$. הסבירו באמצעות שדה הכיוונים למה הפתרון שמקיים את תנאי ההתחלה $y(0)=1$, מוגדר לכל $x\in\mathbb{R}$.

שאלה מס' 3:

נתונה המשוואה הדיפרנציאלית הבאה : $y'=\frac{2xy}{x^2+6}\cdot\sin\left(\frac{\pi y}{2\left(x^2+6\right)}\right)$.

הוכיחו כי פתרון המקיים $y(0)=1$ מקיים גם $0<y(x)<x^2+17$ בתחום הגדרתו.

שאלה מס' 4:

בהינתן המשוואה $y'=(y-1)(y-2)(y-3)$. הוכיחו כי פתרון בעיית ההתחלה $y(x_0)=y_0$ כאשר $2<y_0<3$ מקיים את ההערכה $2<y(x)<3$ ו- $\lim_{x\to+\infty}y(x)=2$.

שאלה מס' 5:

קבעו אם $y=x^2-1$ מהווה פתרון למשוואה $(y')^4+y^2=-1$! אם כן הוכיחו ואם לא הסבירו למה?

בהצלחה