משוואות דיפרנציאליות רגילות

פתרון תרגיל בית מס' 4

שאלה 1: נתונה המד"ר הלינארית מסדר ראשון הבאה:

$$y' + a(x)\cdot y = b(x)$$

מתקיים: $a(x)=\tan x$, $b(x)=0$ פונקציות רציפות על $x\neq \frac{\pi}{2}+\pi k$ תחום ההגדרה. נתון $y\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$ אינו שייך לתחומי הרציפות, ולכן על פתרון יתקיימו המשפט הקיום והיחידות למד"ר לינאריות.

נפתור אותה בשיטה:

$$\frac{dy}{dx} = -\tan x\cdot y$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int -\tan x\,dx$$

פתרון סינגולרי $y=0$, גם הוא כן מקיים את ה"ב.

$$\ln|y| = \ln|\cos x| + C$$

$$\Rightarrow y = C\cdot\cos x$$

נציב את ה"ב:

$$0 = C\cdot 0$$

כלומר כל $C\in\mathbb{R}$

כלומר יהיו קיימים אינסוף פתרונות, כי תחום משפט הקיום והיחידות אינם מתקיימים.

שאלה מס' 2: $u(x)=\frac{1}{1-x^2}$ רציפה בקטעים $(-\infty,-1)$, $(-1,1)$, $(1,\infty]$

$b(x)=\frac{1}{1+x}$ רציפה בקטעים $(-\infty,-1)$, $(-1,\infty]$

ולכן תחום הרציפות המשותף הוא בהכרח תחום ההגדרה הוא $(-1,1)$ לכן משפט הקיום והיחידות על מד"ר לינארית מסדר ראשון בתחום הנ"ל המקסימלי על הפתרון הוא $(-1,1)$.

שאלה מס' 3:

נמצא כי $y=0$ פותר את המשוואה הדיפרנציאלית.

מכיוון ש- $b(x)=0$, $a(x)=\frac{\sin x+e^x}{x^2+e^x}$ נציב את y בנוסחה

ונקבל מתאפס והיחידות כי נתון בשרטוט היחיד.

שאלה מס' 4:

לפי ערכות כי פתרון הפתרון הכללי הינו, ולפי שאול על המשוואה

מתאפס, ולפי ימין הגע 1. לכן אין פתרון מתאים הדיפרנציאלית.

מכיוון ש- : $x^2:/\ 1=xy2+y'x^2$

$$y'+\frac{2}{x}y=\frac{1}{x^2}$$

$$a(x)=\frac{2}{x}\ ,\ b(x)=\frac{1}{x^2}$$

לכן המקדמים הינם נקודה בעיה $x=0$

לעומת, תנאי מתפצל והיחידות הינם מתקיימים.

שאלה מס' 5:

נניח כי $y=0$ פתרון של בעיית הדיפרנציאלית $\begin{cases}y'+a(x)y=0\\y(0)=0\end{cases}$

ולפי $y=\sin x$ היא פתרון של $y'+a(x)y=0$, ולפי הינו שם

היא פתרון של בעיית הדיפרנציאלית: $\begin{cases}y'+a(x)y=0\\y(0)=0\end{cases}$

לכן היה צריך מתקיים $y=0=\sin x$ על כל הישר, סתירה!

שאלה מס' 6:

$$f(x,y)=\frac{1-y}{2yx^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{(1-y)\cdot 2yx^2-2x^2y^2}{4y^2x^4}=\frac{-2+2y-2y^2}{2y^3x^2}$$

בנקודה סביבת הנקודה $(2,1)$, לכן יש פתרון מהיר שני מתפצל

היום ומהירות של פיקארד.

תחום מלבני D, הינו לכן פתרת מקסימלי הדלקי יחידות

$\{0\neq y,x\ |\ (y,x)\}$ ומכאן את נקודות הדיפרנציאלית $(2,1)$.

לכל שאלות שייתכנו בכך הנתון השלישי

$$D = \{(x,y) \mid x>0\ ,\ y>0\}$$

פתרון המשוואה:

$$\int \frac{1}{x^2}dx = \int \frac{y^2}{1-y}dy \qquad x\neq 0\ ,\ y\neq 1$$

נשים לב כי $y=1$ הנו פתרון סינגולרי שאינו מקיים תנאי ולכן נתעלם ממנו.

$$\int \frac{1}{x^2}dx = \int \frac{1+1-y^2}{1-y}dy$$

$$\int \frac{1}{x^2}dx = \int \frac{1}{1-y}dy + \int \frac{1-y^2}{1-y}dy$$

$$\int \frac{1}{x^2}dx = \int \frac{1}{1-y}dy + \int \frac{(1+y)(1-y)}{1-y}dy$$

$$-\frac{1}{x} + C = -\ln|1-y| + y + \frac{y^2}{2}$$

נציב תנאי: $y(1)=2$

$$-\frac{1}{1} + C = -\ln|1-2| + 2 + \frac{2^2}{2}$$

$$-1 + C = 0 + 2 + 2$$

$$C = 5$$

לכן הפתרון הנו:

$$-\frac{1}{x} + 5 = -\ln|1-y| + y + \frac{y^2}{2}$$