משוואות דיפרנציאליות רגילות

פתרון תרגיל בית מס' 3

שאלה מס' (1):

$$y = e^{cx^2} \quad ; \quad x, y > 0$$

$$\ln y = cx^2$$

$$c = \frac{\ln y}{x^2}$$

~~[illegible]~~

$$y' = \underbrace{e^{cx^2}}_{y} \cdot 2cx$$

$$y' = y \cdot x \cdot \frac{\ln y}{x^2} \cdot 2 = \frac{2 \ln y}{x}$$

$$\frac{dy}{dx} = y' = \frac{2 \ln y}{x} = -$$

$$\int \frac{dy}{2 \ln y} = -\int x\,dx$$

נחשב את $\int \frac{dy}{2 \ln y} = ?$

נסמן: $\ln y = u \qquad \frac{1}{y^2} = v$

$$u' = \frac{1}{y} \qquad v = -\frac{1}{y}$$

נעזר באינטגרציה בחלקים ונקבל:

$$\int \frac{dy}{2 \ln y} = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{y^2} \cdot \ln y - \int \frac{1}{y} \cdot -\frac{1}{y^2} \right) = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{y^2} \ln y + \int \frac{1}{y^3} \right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{y^2} \ln y - \frac{1}{2y^2} \right)$$

ולכן:

$$-\frac{1}{2y^2} - \frac{1}{y^2} \ln y = -\frac{x^2}{2} + c \quad / \cdot 2$$

$$-\frac{1}{y^2} - \frac{2}{y^2} \ln y = -x^2 + 2c$$

$$2c = x^2 - \frac{2}{y^2} \ln y - \frac{1}{y^2}$$

נציב את הנקודה הנתונה.

שאלה מס' (2):

$$y^2 = 2x^2 - Cx^3$$

$$C = \frac{2x^2 - y^2}{x^3}$$

$$2y \cdot y' = 4x - 3\left(\frac{2x^2 - y^2}{x^3}\right) \cdot x^2 = 4x - 6x + 3\frac{y^2}{x}$$

$$2y \cdot y' = -2x + 3\frac{y^2}{x} \quad / : 2y$$

$$y' = -\frac{x}{y} + \frac{3}{2} \cdot \frac{y}{x}$$

$$y' = -\frac{2x^2 + 3y^2}{2xy} = \frac{3y^2 - 2x^2}{2xy}$$

$$-\frac{1}{y'} = \frac{3y^2 - 2x^2}{2xy}$$

$$y' = \frac{2xy}{2x^2 - 3y^2}$$

הומוגנית [redacted], נעלים מונה ומכנה ב- x^2:

$$y' = \frac{\frac{2y}{x}}{2 - 3\left(\frac{y}{x}\right)^2}$$

נציב $\frac{y}{x} = v$ ולכן $y' = v + xv'$

$$v + xv' = \frac{2v}{2 - 3v^2}$$

$$xv' = \frac{2v}{2 - 3v^2} - v = \frac{2v - 2v + 3v^3}{2 - 3v^2} = \frac{3v^3}{2 - 3v^2}$$

$$\int \frac{2 - 3v^2}{3v^3}\, dv = \int \frac{1}{x}\, dx$$

נפתרון סינגולרי $v = 0$ ומכאן $y = 0$ ולכן אינו מקיים את ת"ב.

$$\int \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{v^3} - \frac{1}{v}\right) dv = \int \frac{1}{x}\, dx$$

$$-\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{v^2} - \ln|v| = \ln|x| + C$$

$$-\frac{1}{3}\cdot\frac{x^2}{y^2} - \ln\left|\frac{y}{x}\right| = \ln|x| + C$$

$$-\frac{1}{3}\frac{x^2}{y^2} - \ln|y| = C$$

נציב $(0,e)$:

$$-1 = C$$

ולכן:

$$-\frac{1}{3}\frac{x^2}{y^2} - \ln|y| = -1$$

נציב $(\alpha,1)$:

$$-\frac{1}{3}\alpha^2 = -1$$

$$\alpha^2 = 3$$

$$\alpha = \pm\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \quad \alpha = \sqrt{3}$$

כי $x > 0$.

שאלה מס' (3):

$$y = C\cdot e^{2x}$$

$$C = e^{2x}\cdot y$$

$$y' = -2C\,e^{-2x}$$

$$y' = -2e^{2x}y\cdot e^{-2x} = -2y$$

$$y'^{-1} = \frac{1}{2y}$$

$$\int 2y\,dy = \int dx$$

$$y^2 = x + C$$

נציב $(1,1)$ ונקבל:

$$C = 0$$

תשובה:

$$x = y^2$$

ונוודא כי הנקודות המקיימות $(2,4)$ מקיימות

$$2^2 = 4 \checkmark$$

שאלה מס' (4):

$y' - y = -1 \qquad y(0) = y_0$

$y' = y - 1$

$y = 1$ פתרון סינגולרי.

$$\int \frac{dy}{y-1} = \int dx$$

$$\ln|y-1| = x + C$$

$$y - 1 = C \cdot e^x$$

$$y = Ce^x + 1$$

$$y(0) = y_0 = C \cdot e^0 + 1 = C + 1$$

$$\Rightarrow C = y_0 - 1$$

תשובה:

$$y(x) = (y_0 - 1) \cdot e^x + 1$$

מכאן שכאשר $y_0 > 1$ אזי:

$$\lim_{t \to \infty} y(t) = -\infty$$

אזי $y_0 = 1$ פתרון סינגולרי.

אזי $y_0 < 1$ נקבל:

$$\lim_{t \to -\infty} y(t) = +\infty$$

מכן הבעיה הינה כאשר $y_0 > 1$.

שאלה מס' (5):

$$y' + \frac{1}{t} y = 2$$

נחפש גורם אינטגרציה:

$$r(t) = e^{\int \frac{1}{t} dt} = e^{\ln t} = t$$

תשובה:

$$t \cdot y' + y = 2t$$

$$\int (t \cdot y)' = \int 2t \, dt$$

$$t \cdot y = t^2 + C$$

$$y = t + \frac{1}{t} \cdot C$$

נשתמש עתה ב $y(1)=1$ כדי לקבוע את C:

$$y(1) = \frac{C}{1} + 1 = 1$$

$$C = 0$$

$$\Rightarrow \quad y(t) = t$$

ולכן:

$$\lim_{t \to 0^+} y(t) = \lim_{t \to 0^+} t = 0$$

שאלה מס' (9):

$$y' = \frac{y - y^2 \cos x}{y^2 + x}, \quad y(0) = 1$$

מצא $y(\pi) = ?$

$$0 = y\,dx + \underbrace{(-y^2 - x)}_{Q(x,y)}\,dy + x\,dy\underbrace{(y - y^2 \cos x)}_{P(x,y)}$$

נבדוק האם הוא מדויק:

$$\left.\begin{aligned} P_y &= 1 - 2y\cos x \\ Q_x &= -1 \end{aligned}\right\} \neq$$

אין אורנה מדויק אפשר למצוא אורנה אינטגרציה משתנה, נניח אורנה האינטגרציה תלוי ב- x אז:

$$\frac{\mu'(x)}{\mu(x)} = \frac{P_y - Q_x}{Q} = \frac{1 + x\cos x - 1}{-y^2 - x} = \frac{(x\cos x - 1)}{y^2 + x}$$

אין μ כזה שלו נכון.

נניח אכנו תלוי ב- y:

$$\frac{\mu'(y)}{\mu(y)} = \frac{P_y - Q_x}{-P} = \frac{(x\cos x - 1)}{y - x\cos x} = \frac{(x\cos x - 1)}{-y(1 - x\cos x)} = -\frac{1}{y}$$

$$\ln \mu(y) = -2\ln y = \ln y^{-2}$$

$$\mu(y) = y^{-2} = \frac{1}{y^2}$$

נכפיל משוואה ב- ונקבל:

$$0 = y\,dx + \underbrace{\left(-1 - \frac{x}{y^2}\right)}_{Q}\,dy + x\,dx\underbrace{\left(\frac{1}{y} - \cos x\right)}_{P} \qquad (S)$$

$$\left.\begin{aligned} P_y &= -\frac{1}{y^2} \\ Q_x &= -\frac{1}{y^2} \end{aligned}\right\} =$$

נמצא את $F(x,y)$:

$$F(x,y) = \int \left(\frac{1}{y} - \cos x\right) dx + h(y) = \frac{x}{y} - \sin x + h(y)$$

$$F_y = -\frac{x}{y^2} + h'(y) = Q = -\frac{x}{y^2} - 1$$

$$h'(y) = -1$$

$$h(y) = -y$$

ולכן:

$$\frac{x}{y} - \sin x - y = c$$

נציב $y(0) = 1$ ולכן:

$$\frac{0}{1} - \sin(0) - 1 = c$$

$$\Rightarrow c = -1$$

ולכן:

$$\frac{x}{y} - \sin x - y = -1 \quad / \cdot y$$

$$x - y\sin x - y^2 = -y$$

$$y^2 + (\sin x - 1)\cdot y - x = 0$$

$$y = \frac{1 - \sin x \pm \sqrt{(\sin x - 1)^2 + 4x}}{2}$$

$$y(\pi) = \frac{1 - \sin\pi + \sqrt{(\sin\pi - 1)^2 + 4\pi}}{2}$$

$$\Rightarrow y(\pi) = \frac{1 + \sqrt{1 + 4\pi}}{2} = \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{1 + 4\pi}\right)$$