משוואות דיפרנציאליות רגילות

פתרון תרגיל בית מס' 2

שאלה מס' 4):

נראה ש': המשוואה מהצורה הומוגנית

$$(3xy + y^2)dx + (x^2 + xy)dy = 0$$

$$\iff y' = -\frac{3xy + y^2}{x^2 + xy}$$

נוציא מונה ומכנה את x^2 ונקבל:

$$y' = -\frac{3\frac{y}{x} + \left(\frac{y}{x}\right)^2}{1 + \frac{y}{x}}$$

נסמן: $\frac{y}{x} = v$ אז: $y' = v + xv'$

נרכז:

$$v + xv' = -\frac{3v + v^2}{1 + v}$$

$$xv' = -\frac{3v + v^2}{1+v} - v$$

$$xv' = \frac{-3v - v^2 - v - v^2}{1+v} = \frac{-4v - 2v^2}{1+v} = \frac{-2v(2+v)}{1+v}$$

נרכז:

$$\frac{1+v}{2v(2+v)}dv = -\frac{1}{x}dx$$

נקודות סינגולריות: $v = 0, -2$

$$v = 0 \implies y = 0$$

$$v = -2 \implies y = -2x$$

נדע מאיזשהו כי $v \neq 0, -2$ ונפתח:

$$\frac{1+v}{2v(2+v)} = \frac{A}{2v} + \frac{B}{2+v} = \frac{A(2+v) + 2Bv}{2v(2+v)}$$

$$= \frac{2A + v(A + 2B)}{2v(2+v)}$$

פתרון:

$$A = \frac{1}{2} \quad \Leftarrow \quad 2A = 1$$

$$1 = 2B + A \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2} + 2B = 1 \quad \Leftarrow \quad B = \frac{1}{4}$$

שים/:

$$\frac{1+v}{v^2(2+v)} = \frac{1}{v^4} + \frac{1}{4(2+v)}$$

ו/ג:

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \int \frac{1}{v^4}\,dv + \int \frac{1}{4(2+v)}\,dv$$

$$\ln|x| + C = -\frac{1}{4}\ln|v| + \frac{1}{4}\ln|2+v|$$

$$\ln|x| + C = -\frac{1}{4}\ln|v^2+2v|$$

$$\frac{1}{cx} = (v^2+2v)^{\frac{1}{4}}$$

נציב בחזרה $v = \frac{y}{x}$ ונקבל:

$$\frac{1}{cx} = \left[\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 2\frac{y}{x}\right]^{\frac{1}{4}}$$

דוגמה נ': האם המשוואה מדויקת:

$$\underbrace{(3xy+y^2)}_{P(x,y)}dx + \underbrace{(y^2+3xy)}_{Q(x,y)}dy = 0$$

$$\left.\begin{aligned} P_y &= 3x + 2y \\ Q_x &= y + 2x \end{aligned}\right] \neq$$

אינו מתקבל אבל אולי נוכל למצוא מחלק:

$$\frac{P_y - Q_x}{Q} = \frac{3x + 2y - y - 2x}{y^2 + 2xy} = \frac{y+x}{y(y+x)} = \frac{1}{y}$$

$$\mu(x) = e^{\int \frac{1}{x}\,dx} = x$$

מכפיל זה האופייני הוא בדיוק שמקיים משוואה מדויקת:

$$\underbrace{(3x^2y + xy^2)}_{P'(x,y)}\,dx + \underbrace{(y^2x + x^3)}_{Q'(x,y)}\,dy = 0$$

$$\left.\begin{aligned} P'_y &= 3x^2 + 2xy \\ Q'_x &= 3x^2 + 2xy = x'_Q \end{aligned}\right] =$$

מכאן נובע שהמשוואה מדויקת.

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 3x^2y + xy^2$$

$$\Rightarrow \quad F(x,y) = \int (3x^2y + xy^2)\,dx + h(y) = yx^3 + \frac{x^2y^2}{2} + h(y) \quad \Rightarrow$$

$$F_y = x^3 + x^2y + h'(y) = y^2x + x^3 = Q(x,y)$$

$$\Rightarrow \quad h'(y) = 0$$

$$\Rightarrow \quad h(y) = C$$

מכאן נובע שהפתרון הכללי הוא:

$$x^3y + \frac{x^2y^2}{2} + C = 0$$

שאלה מס' (2):

נתון $0 = \underbrace{\left(y - \frac{y^2}{x}\right)}_{N}dx + \underbrace{(1+xy)}_{M}dy$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = -1 + \frac{y^2}{x^2} \quad , \quad \frac{\partial M}{\partial y} = x$$

ראשית נחשב ביטוי שנראה אולי מסובך אך מתקצר משמעותית:

$$\frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{N} = \frac{-1 + \frac{y^2}{x^2} - x}{\frac{y - y^2}{x}} = \frac{\frac{y - y^2}{x^2}}{\frac{y - y^2}{x}} = \frac{1}{x}$$

$$\mu(x) = e^{\int \frac{1}{x}\,dx} = x$$

$$\underbrace{(2yx+x)}_{M}dx+\underbrace{(y-x^2)}_{N}dy=0$$

$$\begin{vmatrix} M_y = 2x & \\ N_x = 2x & \end{vmatrix} =$$

מכאן שהמשוואה היא מדויקת.

$$F(x,y)=\int(2yx+x)dx=yx^2+\frac{x^2}{2}+h(y) \quad \text{כי} \quad \frac{\partial F}{\partial x}=2xy+x$$

$$=x^2y+\frac{x^2}{2}+h(y)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}=x^2+h'(y)=x^2+y-x^2=N$$

$$\Rightarrow h'(y)=y \Big/ \int$$

$$h(y)=\frac{y^2}{2}+C$$

מכאן הפתרון:

$$x^2y+\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}+C=0$$

ב)

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{3x^2y+y^2}{2x^3+3xy}$$

$$M=3x^2y+y^2$$

$$N=2x^3+3xy$$

$$\frac{\partial M}{\partial y}=3x^2+2y \quad , \quad \frac{\partial N}{\partial x}=6x^2+3y$$

שוב מדויקת, נמצא גורם אינטגרציה:

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}=\frac{3x^2+2y-6x^2-3y}{2x^3+3xy}=\frac{-3x^2-y}{x(2x^2+3y)}$$

שוב נקבע גורם הפתרון הוא x או y, נבחר בזה הנוח:

$$\frac{1}{x}=\frac{-3x^2-y}{-x(3x^2+y)}=\frac{-3x^2-y}{-3x^3-xy}=\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{-M}$$

ג)

מכפ/: $\mu(y) = e^{\int \frac{1}{y} dy} = y$

$$\underbrace{(3x^2y^2 + y^3)}_{M}dx + \underbrace{(2x^3y + 3xy^2)}_{N}dy = 0$$

$$\begin{cases} M_y = 6x^2y + 3y^2 \\ N_x = 6x^2y + 3y^2 \end{cases} =$$

נפש מד"ם, נשים לב:

$$f(x,y) = \int (3x^2y^2 + y^3)dx + h(y) = x^3y^2 + xy^3 + h(y) \quad \text{כי} \quad \frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2y^2 + y^3$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2x^3y + 3xy^2 + h'(y) = 2x^3y + 3xy^2 = N$$

$$\Rightarrow h'(y) = 0 \quad / \int$$

$$\Rightarrow h(y) = C$$

לכן הפתרון:

$$x^3y^2 + xy^3 + C = 0$$

ב) $y' = \frac{2y - x + 5}{y - 2x - 4}$

כדי למצוא נקודת מפגש נפתור מערכת:

$$\begin{cases} 2y - x = -5 \\ -2x + y = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x + 2y = -5 \\ -4x + y = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3x = 3 \\ -2y = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -2 \end{cases}$$

נעשה הזזה מתאימה:

$$\begin{cases} \bar{x} = x + 1 \\ \bar{y} = y - 2 \end{cases}$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{d\bar{y}}{d\bar{x}} = \frac{\bar{x} - 2\bar{y}}{2\bar{x} + \bar{y}}$$

נקבל כי מקורות מסיבוב הומוגני, נעשה מהצורה:

$$\bar{y} = \lambda \bar{x}$$

$$\bar{y}' = \lambda + \lambda' \bar{x}$$

$$v'x + v = \frac{2v-1}{-v+2}$$

$$v'x = \frac{2v-1+v^2-2v}{2-v} = \frac{v^2-1}{2-v}$$

פתרונות סינגולריים: $v = \pm 1 \Rightarrow y = \pm x \Rightarrow y+2 = \pm(x-1)$

מתקיים: $v \neq \pm 1$

$$\frac{2-v}{v^2-1}\,dv = \frac{1}{x}\,dx$$

$$\frac{2-v}{v^2-1} = \frac{2-v}{(v-1)(v+1)} = \frac{A}{v-1} + \frac{B}{v+1} = \frac{A(v+1)+B(v-1)}{v^2-1} =$$

$$= \frac{(A+B)v + A - B}{v^2-1} =$$

$$+\begin{cases} A+B = -1 \\ A-B = 2 \end{cases}$$

$$2A = 1$$

$$A = \frac{1}{2}$$

$$B = -\frac{3}{2}$$

ולכן:

$$\int \frac{1}{2(v-1)}\,dv - \int \frac{3}{2(v+1)}\,dv = \int \frac{1}{x}\,dx$$

$$\frac{1}{2}\ln|v-1| - \frac{3}{2}\ln|v+1| = \ln|x| + C$$

$$\ln\left(\frac{v-1}{(v+1)^3}\right)^{\frac{1}{2}} = \ln(Cx)$$

וזו הסיבה לכך:

$$C(x-1) = \left[\frac{\frac{y+2}{x-1} - 1}{\left(\frac{y+2}{x-1}+1\right)^3}\right]^{\frac{1}{2}}$$

ג)

$$y' = \frac{x-3y+1}{3x-9y+4}$$

נציב $v = x-3y$ ונקבל משוואה פרידה

$$\Rightarrow \quad v' = 1-3y'$$

$$y' = \frac{v+1}{3v+4}$$

$$\Rightarrow \quad v' = 1 - 3\,\frac{v+1}{3v+4}$$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{3v+4-3v-3}{3v+4} = \frac{1}{3v+4}$$

$$\int (3v+4)\,dv = \int 1\,dx$$

$$\frac{3v^2}{2} + 4v = x + C$$

$$\frac{3(x-3y)^2}{2} + 4(x-3y) = x + C$$

שאלה מס' (3):

ג)

$$\underbrace{(x^2-y^2+1)}_{M}dx + \underbrace{(x^2-y^2-1)}_{N}dy = 0$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -2y \neq \frac{\partial N}{\partial x} = 2x$$

נחפש מחלק אינטגרציה. נניח $z = x-y \Rightarrow z_x = 1,\ z_y = -1$

$$\frac{s'}{s} = \frac{M_y - N_x}{z_x N - z_y M} = \frac{-2y-2x}{(x^2-y^2-1)\cdot 1 - (-1)(x^2-y^2+1)}$$

$$\Rightarrow \quad s(z) = \frac{1}{z}$$

$$\left(\frac{x^2-y^2+1}{x-y}\right)dx + \left(\frac{x^2-y^2-1}{x-y}\right)dy = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{x^2-y^2+1}{x-y} = x+y+\frac{1}{x-y}$$

$$F(x,y) = \int\left[(x+y) + \frac{1}{x-y}\right]dx + h(y) = \frac{x^2}{2} + xy + \ln|x-y| + h(y)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = x - \frac{1}{x-y} + h'(y) = \frac{x^2-y^2-1}{x-y} \quad *$$

$$x - \frac{1}{x-y} + h'(y) = x + y - \frac{1}{x-y}$$

$$h'(y) = y \quad / \int$$

$$h(y) = \frac{y^2}{2} + C$$

פתרון הסעיף:

$$\frac{x^2}{2} + xy + \ln|x-y| + \frac{y^2}{2} + C = 0$$

ב/

$$ydx - (x^2+y^2+x)dy = 0$$

$$M = -y \qquad N = x^2+y^2+x$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -1 \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = 2x+1$$

לא מדויק.

$$z_x = 2x \quad , \quad z_y = 2y \quad , \quad z = x^2+y^2$$

$$\frac{s'}{s} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{Nz_x - Mz_y} = \frac{-1-1-2x}{(x^2+y^2+x)\cdot 2x - (-y)2y} = -\frac{1}{z}$$

$$s(z) = -\frac{1}{z}$$

$$\left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right)dx + \left(\frac{x^2+y^2+x}{x^2+y^2}\right)dy = 0$$

מדויק.

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{-y}{x^2+y^2} \Rightarrow f(x,y) = \int \frac{-y}{x^2+y^2}dx + h(y) =$$

$$= \int \frac{-y\,dx}{y^2\left(\left(\frac{x}{y}\right)^2+1\right)} + h(y) = -\tan^{-1}\frac{x}{y} + h(y)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 1 + \frac{x}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2} + h'(y) \Rightarrow h'(y) = 1 \quad / \int$$

$$h(y) = y + C$$

סה"כ: $-\tan^{-1}\frac{x}{y} + y = C$ (ג)

ג/ $(xy + 3y^3)dx + (g(x) + 4xy^2)dy = 0$

$\mu(x,y) = x^2y$

נכפיל את המשוואה המדויקת ונקבל את השוויון ונקבל:

$$\underbrace{(x^3y^2 + 3x^2y^4)}_{P(x,y)}dx + \underbrace{(x^2y\,g(x) + 4x^3y^3)}_{Q(x,y)}dy = 0$$

$$\left.\begin{aligned} P_y &= 2x^3y + 12x^2y^3 \\ Q_x &= 2xy\,g(x) + x^2y\,g'(x) + 12x^2y^3 \end{aligned}\right] =$$

נשווה ונקבל:

$$2x^3y = 2xy\,g(x) + x^2y\,g'(x) \;/\; x^2y$$

$$2x = g(x) + g'(x)\frac{2}{x}$$

מכאן שפ"ה ליניארית סדר ראשון ולכן קיים ויחיד בקטע שבו $x \neq 0$. נרצה:

$$\mu(x) = e^{\int \frac{2}{x}dx} = e^{2\ln|x|} = x^2$$

נכפיל משוואה זו ונקבל:

$$2x^3 = x^2g(x) + 2xg(x)$$

$$\int 2x^3dx = \int [x^2g(x)]'$$

$$x^4\frac{1}{2} = \frac{2x^4}{4} = x^2g(x)$$

$$\Rightarrow g(x) = \frac{1}{2}x^2$$

נציב $x = \frac{1}{2}$ ונקבל:

$$g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8}$$

ב/ $(2e^{xy}+y)dx+(xe^{xy}-x-2y)dy=0$

נעזר שוב המשוואה הבאה הינו מהצורה:

$$F(x,y)=e^{xy}$$

נכפול בו ונבדוק שוב נקבל משוואה מדויקת:

$$\underbrace{(2+ye^{xy})}_{P(x,y)}dx+\underbrace{(xe^{xy}-2y)}_{Q(x,y)}dy=0$$

$$\left.\begin{aligned}P_y&=e^{xy}+xye^{xy}\\Q_x&=e^{xy}+xye^{xy}\end{aligned}\right\}=$$

לכן נוכל למצוא משוואה מדויקת.

נמצא $F(x,y)$:

$$F(x,y)=\int P(x,y)dx=\int(2+ye^{xy})dx+h(y)=2x+xe^{xy}+h(y)$$

$$F_y=xe^{xy}+h'(y)=Q=xe^{xy}-2y$$

$$h'(y)=-2y$$

$$h(y)=-y^2$$

לכן:

$$F(x,y)=2x+e^{xy}-y^2=C$$

שאלה מס' (4):

$$xy\,dy - y^2 - x^2 e^{\frac{y}{x}}\,dx = 0$$

נעלה ב- dx ונקבל:

$$y' - \frac{y}{x} - e^{\frac{y}{x}} = 0$$

נסמן: $\frac{y}{x} = v \Rightarrow y = vx$

$$\Rightarrow y' = v + xv'$$

נציב ונקבל:

$$v + xv' - v - e^{v} = 0$$

$$xv' = \frac{e^{v}}{v}$$

$$v' = \frac{\frac{dv}{dx}}{x} = \frac{e^{v}}{v}$$

$$\int \frac{v}{e^{v}}\,dv = \int \frac{1}{x}\,dx$$

$$-e^{-v}\cdot v - e^{-v} = \ln|x| + C$$

$$-e^{-\frac{y}{x}}\cdot\frac{y}{x} - e^{-\frac{y}{x}} = \ln|x| + C \quad /\cdot x$$

$$-e^{-\frac{y}{x}}\cdot y - x\cdot e^{-\frac{y}{x}} = x\ln|x| + Cx$$

$$e^{-\frac{y}{x}}(-y-x) = x\ln|x| + Cx$$

שאלה מס' (5):

$$y' + 9x^2 y = 3\sqrt[3]{y^2}\, e^{-x^3} \sin\left(\frac{x}{2}\right)$$

נחלק ב- $y^{\frac{2}{3}}$:

$$\frac{y'}{y^{\frac{2}{3}}} + 9x^2 \cdot \frac{y}{y^{\frac{2}{3}}} = 3e^{-x^3} \sin\left(\frac{x}{2}\right)$$

כדי להיפטר מהשורש, נגדיר:

$$z = \frac{1}{y^{n-1}}$$

$$z = \frac{1}{y^{-\frac{1}{3}}} = \sqrt[3]{y} = y^{\frac{1}{3}}$$

$$z' = \frac{1}{3} \cdot y^{-\frac{2}{3}} \cdot y'$$

$$\Rightarrow \quad 3z' + 9x^2 z = 3e^{-x^3} \cdot \sin\left(\frac{x}{2}\right) \quad / : 3$$

$$z' + \underbrace{3x^2}_{P(x)} z = \underbrace{e^{-x^3} \sin\left(\frac{x}{2}\right)}_{q(x)}$$

לכן הפתרון הכללי:

$$z(x) = e^{-\int P(x)dx} \cdot \left[\int e^{\int P(x)dx} \cdot q(x)\, dx + C \right] \cdot e^{-\int P(x)dx}$$

$$z(x) = e^{-\int 3x^2 dx} \cdot \left[\int e^{\int 3x^2 dx} \cdot e^{-x^3} \cdot \sin\left(\frac{x}{2}\right) dx + C \right] \cdot e^{-x^3}$$

$$= e^{-x^3} \cdot \left[\int e^{x^3} \cdot e^{-x^3} \cdot \sin\left(\frac{x}{2}\right) dx + C \right] \cdot e^{-x^3}$$

$$= e^{-x^3} \cdot \int \sin\left(\frac{x}{2}\right) dx + C \cdot e^{-x^3}$$

$$= e^{-x^3} \left(-2\cos\left(\frac{x}{2}\right) \right) + C e^{-x^3}$$

$$z(x) = e^{-x^3} \left(C - 2\cos\left(\frac{x}{2}\right) \right)$$

$$z = y^{\frac{1}{3}} \Rightarrow y = z^3$$

$$y(x) = e^{-3x^3} \left(C - 2\cos\left(\frac{x}{2}\right) \right)^3$$