משוואות דיפרנציאליות רשלות
פתרון תרגיל בית מס' 1

שאלה מס' 1:

א) סדר 1 , שלו לינארית

ב) סדר 1 , לא לינארית

ג) סדר 1 , לינארית

ד) סדר 3 , לינארית.

ה) סדר 2 , שלו ~~לינארית~~ לינארית

שאלה מס' 2:

א)
$$y' = y - \frac{x}{y} e^{\frac{x}{y}}$$

משוואה זו הינו משוואה הומוגנית נרצה לעשות $\frac{x}{y} = v$

ולאחר הצבה נקבל: $v - e^v = v$

נציב $y = x \cdot v$ ~~$y = x \cdot v$~~

נגזור ונקבל:

$$y' = v + x \cdot v'$$

נרצה שגם נציב במקום y' נקבל:

$$v + x \cdot v' = v - e^v$$

$$x \cdot v' = -e^v \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{x}{e^v} = \frac{dx}{dv} \quad \Leftrightarrow$$

$$\int \frac{x}{dx} = -\int \frac{e^v}{dv} \quad , \quad x \neq 0$$

נקבל כי אין פתרונות סינגולריים שלו.

כעת נותר לחשב את האינטגרל $\int \frac{e^v}{dv}$ נשתמש בהצבה

$e^v = u$

$dv \cdot v = du$

נקבל: $\int \frac{e^v}{dv} = \int \frac{1}{v} du = -\frac{u}{v}$

ונקבל:

$$-\frac{e^v}{1} = -\ln|x| + C_1$$

(2)

$$-\frac{1}{e^y} = \ln|x-1| + C \quad / \cdot(-1)$$

$$e^{-y} = \ln|x| + C$$

$$e^{-\frac{x}{y}} = \ln|x| + C$$

ב) $$(x+2y)dx - xdy = 0$$

$$y' = \frac{x+2y}{x} \quad (*)$$

משוואה משפחת הומוגנית, לכן נציב $\frac{x}{y} = v$

$$y = xv$$

$$y' = v + xv' \quad \Rightarrow$$

מכאן נציב את המשוואה $(*)$ ונקבל:

$$y' = \frac{x}{y}2 + 1$$

נציב את $\frac{x}{y} = v$ ואת $y' = v + xv'$ ונקבל:

$$v + xv' = 2v + 1$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{dv}{v+1} \quad \Rightarrow$$

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{dv}{v+1}, \quad x \neq 0, \quad v \neq -1$$

נציין כי הפתרון הסינגולרי שאבד שהוא $v = -1$

יתקבל כאשר $x = -y$ שהוא פתרון סינגולרי

של $(*)$.

כעת אחרי אינטגרציה מקבלים:

$$\ln|v+1| = \ln|x| + C \quad / \cdot 2$$

$$v \cdot 2 = x + 1$$

$$\frac{x}{y} \cdot 2 = x + 1$$

ונציב פתרון כללי בנוסחה סתומה.

ג) $\frac{y-x^2}{x^2-y} = y$ $(*)$ כי זה משוואה משפחת הומוגנית, נתון נציב:

$$y = vx$$

$$y' = v + xv'$$

(3) נשתמש בהצבה (*), ונמצא את המשוואה הדיפרנציאלית ביחס ל- x ונקבל:

$$y' = \frac{3 - \frac{y}{x}4}{\frac{y}{x} - 2}$$

מכיוון שנציב $\frac{y}{x} = v$ וכן $y' = v'x + v$ ונקבל:

$$v'x + v = \frac{3 - 4v}{v - 2}$$

$$v'x = \frac{3 - 4v}{v-2} - v = \frac{3 - 4v - v^2 + 2v}{v-2}$$ כלומר

$$x'v = \frac{3 - 2v + v^2}{v-2}$$ כלומר

$$\frac{dv}{dx} \cdot x = \frac{3 - 2v + v^2}{v-2}$$

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{(v-2)}{3 - 2v + v^2} dv$$ כלומר

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{(v-2)}{(v+3)(1-v)} dv$$ # $x \neq 0$, $v \neq -3, 1$

שלב הבא הוא פירוק ל- סכום שברים פשוטים. $v = -3, 1$ ומכאן נקבל

$$x = y$$, $$x = -3y$$

שלב נבדוק מי הפתרון שנציב ב- (*) ונקבל שרק הפתרון הראשון עובד.

כעת עלינו לחשב את האינטגרל ב- # נפתח לשברים:

$$\frac{v-2}{(v+3)(1-v)} = \frac{A}{1-v} + \frac{B}{v+3} = \frac{A(v+3) + B(1-v)}{(v+3)(1-v)}$$

$$= \frac{(A+B)\cdot v + 3A - B}{(v+3)(1-v)}$$

מכאן: (1) $A + B = -1$

(2) $3A - B = 2$

מכאן נציב ב- (2) $B = -1 - A$ ונקבל:

$$3A + 1 + A = 2$$

$$4A = 1$$

$$A = \frac{1}{4}$$ כלומר $$B = -\frac{5}{4}$$

כלומר:

$$\frac{1}{(v+3)} \cdot \frac{5}{4} - \frac{1}{(1-v)} \cdot \frac{1}{4} = \frac{v-2}{(v+3)(1-v)}$$

שאלה מס' (4)

ענין הכתוב:

$$\int \frac{(x-2)}{x^2+2x-3}\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{5}{4}\int \frac{dx}{x+3} = \frac{1}{4}\ln|x-1| - \frac{5}{4}\ln|x+3|$$

ונסכם:

$$\frac{1}{4}\ln|x-1| - \frac{5}{4}\ln|x+3| = \ln|x| + C_1 \quad /\cdot 4$$

$$\ln\left[(x-1)^{\frac{1}{4}}\right] - \ln\left[(x+3)^{\frac{5}{4}}\right] = \ln|x| + C_1$$

$$\ln\left[\frac{(x-1)^{\frac{1}{4}}}{(x+3)^{5/4}}\right] = \ln|x| + C_1 \quad /e^x$$

$$\sqrt[4]{\frac{(x-1)}{(x+3)^5}} = C\cdot x$$

נציב $v = \frac{y}{x}$ ונקבל:

$$\sqrt[4]{\frac{\left(\frac{y}{x}-1\right)}{\left(\frac{y}{x}+3\right)^5}} = C\cdot x$$

כאן סיימנו כללי בצורה סתומה.

ד. $y' = \frac{3y^2+x^2}{2xy}$ כי משוואה מ"ה כמוותנו נוכל לבצע $v = \frac{y}{x}$

$$y = x\cdot v$$

$$y' = v + x'v$$

מציבים את y המוכר ובמכנה ב- x^2 ונקבל:

$$y' = \frac{1+3\frac{y^2}{x^2}}{2\frac{y}{x}}$$

מציבים $v = \frac{y}{x}$ ו- $y' = v + x'v$:

$$v + x'v = \frac{1+3v^2}{2v}$$

$$x'v = \frac{1+3v^2}{2v} - v = \frac{1+3v^2-2v^2}{2v} = \frac{1+v^2}{2v}$$

$$\frac{x\cdot 2v}{1+v^2} = \frac{2x}{1+v^2}$$

$$\int \frac{2v}{1+v^2}\,dv = \ln(1+v^2) = \ln\frac{x^2}{x^2} \qquad x\neq 0$$

$$\ln|y^2+1| = \ln|x| + C_1$$

$$y^2+1 = Cx \quad \text{כלומר}$$

$$\frac{y^2}{x} + 1 = C \cdot x$$

ונבדוק פתרון כללי בצורה סטנדרטית.

שאלה מס' (3):

מכיוון שאנחנו יודעים כי y_1, y_2 שני פתרונות פרטיים של משוואה דיפרנציאלית לינארית של הומוגנית מסדר שני הנתונה על כך, נשתמש אופרטור גזירה L כך:

$$L(y) = y'' + p \cdot y' + f \cdot y \quad \text{נגדיר:}$$

ואז נוכל לרשום את המשוואה הנתונה באופרטורים לינארי, ונסמן אותה בתור L:

$$L(y) = [y'' + p \cdot y' + f \cdot y] \quad \text{נגדיר:}$$

$$L(y) = [y_2'' + p \cdot y_2' + f \cdot y_2]$$

$$L(y) = \left[(y_2'' + p \cdot y_2' + f \cdot y_2)\alpha + (y_1'' + p \cdot y_1' + f \cdot y_1)\beta\right] \quad \text{נגדיר:}$$

נשתמש:

$$= \left[(y_2'' + p \cdot y_2' + f \cdot y_2)\alpha\right] + \left[(y_1'' + p \cdot y_1' + f \cdot y_1)\beta\right] = L(\alpha y_2) + L(\beta y_1) = L(\alpha y_2 + \beta y_1)$$

$$L(0) = L(\alpha \cdot (\beta + \alpha)) = L(\alpha \cdot \beta) + L(\alpha \cdot \alpha) =$$

$$\alpha + \beta = 1 \quad \text{כלומר}$$

ובכן מצאנו את הצירוף של α, β כך שמתקיים $\alpha y_2 + \beta y_1$ פתרון של המשוואה.

שאלה מס' (4):

צורה כללית של משוואה דיפרנציאלית לינארית של הומוגנית מסדר כלשהו הינו: $y(x) = \alpha y(x) + y'$ (1) כלומר $y(x), y(x)$ פונ' כלשהם של x.

ומתקיים: $y(x) = y_1 \cdot y(x) + y_1'$ (2) עם y_1 כלשהו.

$$y(x) = y_2 \cdot y(x) + y_2' \quad (3)$$

מכיוון ש- y_2, y_1 שני פתרונות שונים מתקיים $y_2 - y_1 \neq 0$

נשים לב כי (3) פחות (2) נקבל:

$$0 = (y_2 - y_1) \cdot y(x) + (y_2' - y_1') \quad \Leftarrow$$

$$0 = (y_2 - y_1) \cdot \left[y(x) + (y_2' - y_1')\right]$$

נשים לב כי $y_2 - y_1$ הינו פתרון כללי של המשוואה ההומוגנית: $(y_2 - y_1)\cdot c$ הינו פתרון כללי להומוגנית

כי נכפול פתרון של משוואה מסדר 1 הנו מ"ו ת"ה מעצמו. פתרון כללי להומוגנית

ע"י מסכם יבוא כי: $y_p + (y_2 - y_1)c$ הינו פתרון כללי למשוואה

פתרון פרטי

ולכן פתרון כללי הינו:

$$y(x) = y_1 + (y_2 - y_1)\cdot c$$

או:

$$y(x) = y_2 + (y_2 - y_1)\cdot c$$

שאלה מס' (5):

נתון: $y_1(x)$ פתרון של $y' + P(x)y = 0$

$$y_1' + P(x)y_1 = 0$$

$$y_2' + P(x)y_2 = 0$$

$$(y_1c_1 + y_2c_2)' + P(x)(y_1c_1 + y_2c_2) = (y_1'c_1 + y_2'c_2) + P(x)(y_1c_1 + y_2c_2)$$

$$= c_1(y_1' + P(x)y_1) + c_2(y_2' + P(x)y_2) = 0$$

$$= 0 + 0 = 0$$

טענה: $y_1c_1 + y_2c_2$ הוא פתרון להומוגנית. כלומר $\forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ כאשר

ולכן:

$$= (y_1c_1 + y_2c_2)' + P(x)\cdot(y_1c_1 + y_2c_2) = \underbrace{(y_1'c_1 + y_2'c_2)}_{=0 \text{ נתון}} + \underbrace{P(x)(y_1c_1 + y_2c_2)}_{=0 \text{ נתון}} =$$

$$= c_1\underbrace{[y_1' + P(x)y_1]}_{=0} + c_2\underbrace{[y_2' + P(x)y_2]}_{=0} =$$

$$= 0\cdot c_1 + 0\cdot c_2 = 0$$

ראינו כי $y_1c_1 + y_2c_2$ הינו פתרון להומוגנית.

שאלה מס' (9):

א)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x^2 - xy}$$

נסמן את המשוואה ב- $f(x,y)$:

$$f(tx,ty) = \frac{ty}{t^2x^2 - txty} = \frac{ty}{t(x^2 - xy)} = \frac{y}{x^2 - xy} = \frac{dy}{dx}$$

$y \neq 0$,

$$\frac{y}{x^2} + 1 = \frac{y}{x^2 - xy} \quad \Leftarrow \quad \frac{y}{x} = z + 1 \quad \Leftarrow$$

(7) עמ' 28

נסמן: $g(y)=\frac{y}{\sin y}$, $d(y)=\frac{y}{2}$

נמצא גורם אינטגרציה: $e^{\int\frac{y}{2}dy}=e^{\ln y^2}=y^2$

נכפול את המשוואה בגורם ונקבל:

$$y^2\cdot y'=2x\cdot y+x^2\cdot y^2$$

$$\int y^2\cdot y'=\int(x^2\cdot y)'$$

כעת עלינו לחשב את $\int y^2\cdot y'$, נשים לב שזה בדיוק אינטגרציה בחלקים:

$$\int y^2\cdot y'=y^2\sin y-\int 2y\sin y=y^2\sin y+2y\cos y-\int 2\sin y$$

$$=y^2\sin y+2y\cos y+2\cos y+c \quad /:y^2 \quad \Rightarrow \quad x=y\sin y+2\cos y+cy^{-2}$$

נסדר את הפתרון כפונקציה של y:

$$y=\arccos\frac{x}{2}+\frac{c}{y^2}-\frac{y\sin y}{2}$$

פתרון יחידי: $y=0$, $x=2$

פתרון סינגולרי: $y=0$.

ב) $y=y'(2y^2+x)$

$$y'=\frac{y}{2y^2+x}$$

כאן שמים לב שנוח יותר להסתכל על המשוואה $x(y)$:

$$\frac{x}{y}=\frac{2y^2+x}{y}=2y+\frac{x}{y}$$

$$x'=\frac{x}{y}-2y$$

נסמן: $g(y)=\frac{x}{y}$, $d(y)=-2y$

נמצא גורם אינטגרציה: $e^{\int-\frac{y}{x}dy}=e^{-\ln y}=\frac{x}{y}$

נכפול את המשוואה בגורם ונקבל:

$$\frac{x}{y}\cdot x'=\frac{x^2}{y}-2x$$

$$\frac{x}{y}\cdot x'+2x=\frac{x^2}{y}$$

$$\int\frac{x}{y}\cdot x'+\int 2x=\int\frac{x^2}{y}$$

$$\frac{x^2}{2}+x^2=\frac{x^2}{y}+c$$

פתרון סינגולרי: $y=0$

פתרון כללי נוסף: $\frac{x^2}{2}=cy^2$

$$\frac{1}{y}\cdot x' - \frac{x}{y^2} = 2y$$

$$= \int 2y = \int \left(\frac{1}{y}\cdot x\right)' dx$$

$$= \frac{1}{y}\cdot x = y^2$$

$$= \int X(y)\,dy = y^3$$

ופתרון הומוגני הינו:

$$X_h(y) = C\cdot e^{-\int \frac{1}{y}dy} = C\cdot e^{-\ln|y|} = C\cdot e^{\ln\frac{1}{y}} = C\cdot\frac{1}{y}$$

לכן פתרון כללי הינו:

$$X(y) = C\cdot y + y^3$$

שאלה מס (7):

א) $y' = y\cot x + y^4\cos x$

$$/y^4 : \quad y'y^{-4} = \cot x\cdot y^{-3} - \cos x$$

$$-\frac{1}{3}\left(y^{-3}\right)' - \cot x\cdot\frac{1}{y^3} = \cos x$$

נגדיר: $z = \frac{1}{y^3}$ ונקבל: $z' = -3\cdot y^{-4}\cdot y'$

$$-\frac{1}{3}z' - \cot x\cdot z = \cos x$$

$$z' + 3\cot x\cdot z = -3\cos x$$

$$g(x) = -3\cos x \quad , \quad p(x) = \frac{3}{\tan x}$$

כי $\cot x = \frac{1}{\tan x}$

נחפש גורם אינטגרציה:

$$\mu(x) = e^{\int p(x)dx} = e^{\int 3\cot x dx} =$$

נזכיר כי: $\int \cot x\,dx$ נחשב

$$\int \cot x\,dx = \int \frac{\cos x}{\sin x}dx$$

נגדיר: $u = \sin x$ ואז: $du = \cos x\,dx$

$$\int \frac{\cos x}{\sin x}dx = \int \frac{1}{u}du = \ln|u| = \ln|\sin x|$$

לכן: $e^{3\int \cot x dx} = e^{3\ln|\sin x|} = \sin^3 x$

(ה) נפתור את המשוואה בשלושה צעדים:

$$\sin^3 x \cdot z' + 3\cos x \cdot \sin^2 x \cdot z = -\sin x \cdot \cos x$$

$$\Rightarrow \sin^3 x \cdot z' + 3\sin^2 x \cdot \cos x \cdot z = -\sin x \cdot \cos x$$

$$\Rightarrow \int (\sin^3 x \cdot z)' = -\int \sin x \cdot \cos x$$

כעת נחשב את:

$$-3\int \sin^2 x \cdot \cos x \, dx$$

נבצע: $t = \sin x$ ולכן: $dt = \cos x \, dx$

$$= -3 \cdot \int t^3 \, dt = -\frac{3}{4} t^4$$

נציב בחזרה $t = \sin x$ ונקבל:

$$= -\frac{3}{4} \sin^4 x$$

$$\Rightarrow \sin^3 x \cdot z = -\frac{3}{4}\sin^4 x$$

$z = -\frac{3}{4}\sin x$ ← פתרון פרטי,

נכפול פתרון זה בפתרון הכללי:

$$z_h(x) = C \cdot e^{-\int p(x)dx} = C \cdot e^{-\int 3\cot x \, dx} = C \cdot \frac{1}{\sin^3 x}$$

ולכן פתרון כללי הינו:

$$z(x) = \frac{C}{\sin^3 x} - \frac{3}{4}\sin x$$

ומכיוון ש- $z = y^{-\frac{1}{3}}$ נקבל:

$$y(x) = \left(\frac{C}{\sin^3 x} - \frac{3}{4}\sin x\right)^{-\frac{1}{3}}$$

ב) $y' = y(x - y\ln y 2x^2)$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x - y\ln y 2x^2}$$

שהפך יהיה: $x(y)$:

$$x' = \frac{x - y\ln y 2x^2}{y} = \frac{x}{y} - y\ln y 2x^2$$

$$x' + \frac{x}{y} = y\ln y 2x^2$$

⇓

$$\ln y + \ln x = \frac{1}{x \cdot y} + \frac{x'}{x^2}$$

נציב: $\frac{1}{x} = z$ ולכן: $-\frac{x'}{x^2} = z'$

$$\ln y + \ln z = \frac{y}{z} + z' -$$

$$\ln y + \ln z - = \frac{y}{z} - z'$$

$$\ln y + \ln z - = g(y) \ , \quad -\frac{1}{y} = d(y)$$

נמצא גורם אינטגרציה:

$$e^{\ln y + \ln z -} = e^{\int -\frac{1}{y} dy} = e^{\int d(y) dy} = \mu(y)$$

נכפול את המשוואה הגזורה בגורם זה:

$$\frac{y}{\ln y + \ln z -} = \frac{z}{z} - z' \cdot \frac{y}{1}$$

$$\int \frac{y}{\ln y + \ln z -} = \int (z \cdot \frac{y}{1})' \quad =$$

נזכיר שמתקיים כי:

נציב: $\ln y = u$ ולכן $\frac{y}{1} dy = du$

$$= \int z - \frac{y}{\ln y} dy$$

$$= \int z - u du = \frac{u^2}{2} - = u^2 -$$

נציב בחזרה $\ln y = u$ ונקבל:

$$= -(\ln y)^2 = -(\ln y)^2$$

ולכן:

$$(\ln y)^2 - = d z(y) \cdot \frac{y}{1}$$

$$(\ln y)^2 \cdot y - = d z(y) \quad \Rightarrow$$

ובמונחים פחות פורמלי אנחנו נקבל כי:

$$y \cdot c = e^{-\int \frac{y}{1} dy} \cdot c = e^{-\int d(y) dy} \cdot c = \mu(y) z$$

לכן הפתרון הכללי הינו: $y \cdot c + (\ln y)^2 \cdot y - = z(y)$

ומכיוון ש- $\frac{1}{z} = x$ אזי: $\frac{1}{y \cdot c + (\ln y)^2 \cdot y -} = x(y)$