משוואות דיפרנציאליות רגילות

תרגיל בית מס' 11

שאלה מס' 1:

מצא שני פתרונות בלתי תלויים y_1, y_2 בצורת טור סביב $x_0 = 0$ למשוואה $\left(1-x^2\right)y''-2xy'+2y=0$ המקיימים:

$$\begin{cases} y_1(0)=0 \\ y_1'(0)=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} y_2(0)=-1 \\ y_2'(0)=0 \end{cases}$$

שאלה מס' 2:

נתונה המשוואה $y''+4xy'+\alpha y=0$ כאשר α הוא פרמטר. יהי $y_1(x)$ פתרון המשוואה כאשר $\alpha=8$ המקיים את תנאי ההתחלה $\begin{cases} y_1(0)=1 \\ y_1'(0)=0 \end{cases}$ ויהי $y_2(x)$ פתרון המשוואה כאשר $\alpha=-8$ המקיים את תנאי ההתחלה $\begin{cases} y_2(0)=1 \\ y_2'(0)=0 \end{cases}$ אזי:

א. $y_1(0)^{(4)}=128, y_2(0)^{(4)}=-128$.

ב. $y_1(x)$ ו- $y_2(x)$ הם פולינומים.

ג. $y_1(x)$ אינו פולינום ו- $y_2(x)$ הוא פולינום.

ד. $y_2(x)$ אינו פולינום ו- $y_1(x)$ הוא פולינום.

ה. רדיוס ההתכנסות של אחד משני הטורים המייצגים את אחד משני הפתרונות הוא סופי.

שאלה מס' 3:

נתונה המשוואה $y''+(x-1)y'+y=0$, ויהי $y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-2)^n$ פתרון שלה המקיים את התנאים:

$$\begin{cases} y(2)=12 \\ y'(2)=6 \end{cases}$$

חשבו את $\sum_{n=2}^{4}a_n=?$.

שאלה מס' 4:

נתונה המשוואה:

$$\begin{cases} y''+(x-1)y'=0 \\ y(2)=12 \\ y'(2)=12 \end{cases}$$

יהי $y(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k(x-2)^k$ פתרון. חשבו $\sum_{k=1}^{4}a_k=?$.

שאלה מס' 5:

יהי $y(x)$ פתרון המשוואה הדיפרנציאלית $y''-xy'+y=e^x$ המקיים $\begin{cases} y(0)=1 \\ y'(0)=1 \end{cases}$. מצאו את המקדם של x^4 בפיתוח של $y(x)$ לטור חזקות סביב $x=0$.

בהצלחה