מתמטיקה בהנדסת חשמל

פתרון תרגיל בית מס' 10

שאלה מס' (1):

מתקיים שהרונסקיאן של המשוואה עם מקדמים קבועים שווה ל-

$$W_1(x) = C_1 \cdot e^{-\int p(x)dx}$$

נפשט את המשוואה לצורת משוואה בהפרדת משתנים:

$$y = y_1 \cdot y_2 \quad , \quad y_1 = y_1(x)$$

$$\begin{cases} y_2 = y = y_1' \\ y_1'' = -p(x)y_1' - q(x)y_1 = -p(x)y_2 - q(x)y_1 \end{cases}$$

נקבל את המערכת הבאה מכך:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -q(x) & -p(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix}$$

מכאן נובע כי: $\text{trace}(A) = -p(x)$

ומזה לפי נוסחת ליוביל:

$$W_2(x) = C_2 \cdot e^{-\int p(x)dx}$$

כלומר הם אכן שווים זה לזה בדיוק. ∎

שאלה מס' (2):

כדי שמערכת משוואות הומוגניות תהיה מקדמית של קבוע כפל השווה

קבוע מתקיים הן:

$$\begin{cases} y_1' = -y_1 + e^{t}y_2 \\ y_2 = y_1' \end{cases}$$

נשים לב שאותן של יכולים לפתור את המשוואה הראשונה בנפרד כי הוא

מוגדרת שהוא "לא מתייחס" לאבר שלנו, ולכן נוכל לפתור את המשוואה הזאת

קבוע בסיבוב משוואה לינארית הומוגנית מסדר 1.

$$y_2 = A \cdot e^{t} \quad \text{כי} \quad y_2 = y_1'$$

נציב בפתרון זה את המשוואה הבאה:

$$y_1' = -y_1 + A \quad \text{כי} \quad y_1' + y_1 = A$$

כלומר משוואה לינארית של הומוגנית מסדר 1, נפתור בעזרת גורם

לינארי עבור:

$$\mu(t) = e^{\int p(t)\,dt} = e^{\int -1\,dt} = e^{t}$$

$$\Rightarrow \left(e^{t} y_1\right)' = A \cdot e^{t}$$

$$\Rightarrow e^{t} y_1 = A e^{t} + B$$

$$y_1 = A + B e^{-t}$$

נציב חזרה במערכת המקורית:

$$\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ e^{t} \end{pmatrix} + B \begin{pmatrix} e^{-t} \\ 0 \end{pmatrix}$$

לדוגמה: $\vec{V}_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ e^{t} \end{pmatrix}$! $\vec{V}_2(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ 0 \end{pmatrix}$ פותרים את המערכת הפשוטה.

נשתמש ולאו A ו- B שיו בכדי שיהיה השוויון:

$$\begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 1 \\ e^{0} \end{pmatrix} + B \begin{pmatrix} e^{0} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A + B \\ A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = 1 \end{cases}$$

שאלה מס' (3):

המערכת הבאה קיבלנו שקולה ל-:

$$\begin{cases} (1) & \frac{dx}{dt} = y + x \\ (2) & \frac{dy}{dt} = -x + y \end{cases}$$

נגזור את (1):

$$\dot{x} - \dot{x} + x - \dot{x} \overset{\text{מ' (1)}}{=} \left(y + x - \right) + \frac{dx}{dt} \overset{\text{מ' (2)}}{=} \frac{dy}{dt} + \frac{dx}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

$$\Rightarrow \ddot{x} - 2\dot{x} + 2x = 0$$

$$P(r) = r^2 - 2r + 2 = 0$$

$$r_{1,2} = 1 \pm i$$

נפתח:

$$x(t) = c_1 e^t \cos t + c_2 e^t \sin t$$

נגזור (1) ונקבל:

$$y = x' - x =$$

$$= c_1 e^t \cos t + c_1 e^t (-\sin t) + c_2 e^t \sin t + c_2 e^t \cos t - c_1 e^t \cos t - c_2 e^t \sin t =$$

$$= -c_1 e^t \sin t + c_2 e^t \cos t$$

ונקבל:

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} c_1 e^t \cos t + c_2 e^t \sin t \\ -c_1 e^t \sin t + c_2 e^t \cos t \end{pmatrix}$$

שאלה מס' (4):

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}, \quad F(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} \\ 8e^{2t} \end{pmatrix}$$

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -2-\lambda & 1 \\ -3 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (-2-\lambda)(2-\lambda) + 3 = 0$$

$$\lambda_1 = +1 \ , \quad \lambda_2 = -1$$

ו"ע עבור $\lambda_1 = 1$: $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

ו"ע עבור $\lambda_2 = -1$: $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

פתרון כללי אומוגני:

$$x(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} e^t + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} = c_1 \begin{pmatrix} e^t \\ 3e^t \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} e^{-t} \\ e^{-t} \end{pmatrix}$$

$$X_p(t) = \begin{pmatrix} e^t & e^{-t} \\ 3e^t & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \end{pmatrix}$$

פתרון המערכת זה המערכת:

$$\begin{pmatrix} e^t & e^{-t} \\ 3e^t & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1'(t) \\ c_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2t} \\ 8e^{2t} \end{pmatrix}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} e^t & e^{-t} \\ 3e^t & e^{-t} \end{vmatrix} = 1-3 = -2$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} e^{2t} & e^{-t} \\ 8e^{2t} & e^{-t} \end{vmatrix} = e^t - 8e^t = -7e^t$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} e^t & e^{2t} \\ 3e^t & 8e^{2t} \end{vmatrix} = 8e^{3t} - 3e^{3t} = 5e^{3t}$$

$$c_1'(t) = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-7e^t}{-2} = \frac{7}{2}e^t \quad \Rightarrow \quad c_1(t) = \frac{7}{2}e^t$$

$$c_2'(t) = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{5e^{3t}}{-2} = -\frac{5}{2}e^{3t} \quad \Rightarrow \quad c_2(t) = -\frac{5}{9}e^{3t}$$

$$X_p(t) = \begin{pmatrix} e^t & e^{-t} \\ 3e^t & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{7}{2}e^t \\ -\frac{5}{9}e^{3t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{91}{9}e^{2t} \\ \frac{85}{9}e^{2t} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{X}(t) = \begin{pmatrix} c_1 e^t + c_2 e^{-t} + \frac{8}{9}e^{2t} \\ 3c_1 e^t + c_2 e^{-t} + \frac{85}{9}e^{2t} \end{pmatrix}$$

שאלה מס' 5!

נמצא את שורות המטריצה הבאה 1 ונראה כי שורותיו בלתי תלויות:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

נשכנע שמשוואה $\vec{y} = 0$ יש פתרון יחיד מכיוון ש $\det(A) \neq 0$, למשל $\lambda = 1-4$

הוא הקיומי $\lambda=0$ כמה פתרונות יש:

$$\left[A-0\cdot I\right]\cdot\vec{v}=\vec{0} \quad \Leftarrow \quad \begin{pmatrix}1&1&1&1\\2&2&2&2\\3&3&3&3\\4&4&4&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\\v_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

ולאחר דירוג (נעבור בשיעור שלנו בדקות שפתרון מס' הפתרונות מאיתנו תלוי ולא שפתרון)

$$\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\\v_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

במקרה זה משוואה אחת נהיה:

$$v_4=-v_1-v_2-v_3$$

נקבע בוודאי כשהי, ונקבל:

$$\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\\v_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\\-v_1-v_2-v_3\end{pmatrix}=v_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix}+v_2\begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\end{pmatrix}+v_3\begin{pmatrix}0\\0\\1\\-1\end{pmatrix}$$

נשים לב כי דרג של 0 שווה לכמות $\lambda=0$ שלו $=3$

מהו הפ"א בכ"פ?

נעבור שפורמט הכ"כ הוא סכום פ"א:

$$2\lambda+0=4+3+2+1$$

$$2\lambda=10$$

הוא שלא $2\lambda=10$ פותר הוא מס' המשוואות:

$$\vec{0}=\left(A-10I\right)\cdot\vec{v_1} \quad \Leftarrow \quad \vec{0}=\begin{pmatrix}-9&4&4&4\\2&-8&2&2\\3&3&-7&3\\4&4&4&-6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\\v_4\end{pmatrix}$$

תת"מ: נניח שקורה משוואות שקולות שלא נפתרו:

(9)

כי $i\pm$ מקיימים שוויון ביחד לי- 4 שהוא בדיוק המכפלה של $\lambda=2$ ו- הוא ערכיות של כיול, ולכן הוא לא ערכיות שם $\lambda=2$ מכיוון שהפתרון מכפל פולינום נסיק שהכיול הוא שלוש פעמים ולכן

א- $\vec{x}_2$ השווה ל- 1- הוא פתרון של המד'.

ב) א- $\vec{x}_1$ השווה ל- $i\pm$ הוא פתרון של המד'.

שאלה מס' (9):

$$\begin{pmatrix} 1- \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} D + \begin{pmatrix} 1- \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} C + \begin{pmatrix} 1- \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} B + e^{at} A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \vec{x}(t)$$

נתון ערכיות כזה $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ ונמצאים הפתרון הכללי הבא:

$$\vec{v} = v_4 \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

נמצא כי:

$$v_1 = \frac{1}{4} v_4 \quad \text{כי} \quad 0 = v_4 \frac{6}{1} - v_3 \frac{6}{1} - v_2 \frac{6}{1} - v_1$$

$$v_2 = \frac{1}{2} v_4 \quad \text{כי} \quad 0 = v_4 \frac{4}{2} - v_3 \frac{4}{2} - v_2$$

$$v_3 = \frac{3}{4} v_4 \quad \text{כי} \quad 0 = v_4 \frac{4}{3} - v_3$$

נכיל:

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{4} & -\frac{2}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

א/ ע"ע: $-1, -1, -3i, 3i$.

ב/ נזכור: $\vec{v}$ הנו ו"ע של מ"ל עם ע"ע -1 אלמ"ט הת"ל $e^{t}\vec{v}$ הנו פתרון של המערכת.

נקח את הווקטור $\vec{x}_2$ כמכפלה של וקטור אחד שלו ב- t ונחשב את:

$$e^{-t}\cdot\left[\begin{pmatrix}0\\2\\1\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}3\\1\\0\\2\end{pmatrix}\right]=e^{-t}\begin{pmatrix}3t\\2+t\\1\\2t\end{pmatrix}=\vec{x}_2$$

כשאנו צורך לעשות הפרעות על מנ' על מנת לבטל מקדמי קווקטור $\begin{pmatrix}3\\1\\0\\2\end{pmatrix}$ הנו ו"ע של המטריצה תוכן את מבקש לעשות צריך לעשות אותו בסעיף הבא לקבל את כל הוס':

$$V=\alpha\begin{pmatrix}3\\1\\0\\2\end{pmatrix}$$

על ידי, ובשלו נשים $e^{-t}\begin{pmatrix}3t\\2+t\\1\\2t\end{pmatrix}=\vec{x}_2$ הוסף בקצה ∞ כאשר

כי הקפדנים שלנו! שלנו הנו על שמצוכי.

ג/ כן, שכבכבכה הפתרונות הכללי הם קומבינציה לינארית של $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3$ ופתרון נוסף $\vec{x}_4$ שאינו לינארי שאינו הדדי המקורי.

על פתרון שנקבל קומבינציה לינארית $\vec{x}_1, \vec{x}_2$ תיב' להיות על הוסף בקצה הנקי $\left(\frac{1}{2}\right)$ תחן הפתרון מוכיח כי אי $\vec{x}_3, \vec{x}_4$ אינה הפתרונות שאנו מחפשים.