משוואות דיפרנציאליות רגילות--תרגיל בית מס' 10

שאלה מס' 1:

תהי $y''+p(x)y'+q(x)y=0$ מד"ר לינארית עם מקדמים רציפים. הוכיחו כי הוורונסקיאן של שני פתרונות כלשהן של המשוואה (כפי שהוא מוגדר עבור משוואה סקלרית) שווה לוורונסקיאן של שני פתרונות של מערכת המשוואות הלינארית מסדר ראשון שמייצגת את המשוואה (כפי שהוא מוגדר עבור מערכת משוואות) עד כדי קבוע.

תזכורת: עבור משוואה סקלרית הגדרנו את הוורונסקיאן להיות $w(x)=c\cdot e^{\int -p(x)dx}$, ועבור מערכת משוואות הגדרנו אותו להיות $w(x)=c\cdot e^{\int trace(A)dx}$.

שאלה מס' 2:

פתרו את הבעיה : $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & e^{-t} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

שאלה מס' 3: פתרו את המערכת ההומוגנית הבאה ע"י צמצום למשוואה אחת:

$$X'=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}X$$

שאלה מס' 4: פתרו את המערכת הבאה בשיטת וריאציית פרמטרים:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt}+2x-y=e^{2t} \\ \frac{dy}{dt}+3x-2y=8e^{2t} \end{cases}$$

שאלה מס' 5: מצאו את הפתרון הכללי של מערכת המשוואות: $\vec{X}'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}\cdot\vec{X}$

שאלה מס' 6:

נתונה המערכת $\vec{X}' = A \cdot \vec{X}$ שבה A היא מטריצה 4×4 עם מקדמים קבועים ונתון ששניים מהפתרונות הם:

$$\vec{X}_1 = \begin{pmatrix} \cos(3t) \\ -\sin(3t) \\ -\cos(3t) \\ \sin(3t) \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{X}_2 = \begin{pmatrix} 3t \\ 2+t \\ 1 \\ 2t \end{pmatrix} \cdot e^{-t}$$

א. מצאו את כל הע"ע של A.

ב. למערכת יש פתרון מהצורה $\vec{X}_3(t) = \vec{v} \cdot e^{-3t}$ כאשר $\vec{v} \neq \vec{0}$ וקטור קבוע. מצאו את $\vec{v}$.

ג. האם פתרון חסום בקטע $0 < t < \infty$ הוא בהכרח מחזורי.

ד. האם פתרון חסום בקטע $-\infty < t < 0$ הוא בהכרח מחזורי.

בהצלחה