משוואות דיפרנציאליות רגילות--תרגיל בית מס' 8

שאלה מס' 1: הוכיחו כי הפונקציות $e^{r_1x},e^{r_2x},...,e^{r_nx}$ כאשר $r_i \neq r_j$ עבור $i \neq j$ הן פונקציות בלתי תלויות לינארית.

שאלה מס' 2: נתונה המשוואה $y''=U(x)\cdot y$ כאשר $U(x)$ היא פונקציה רציפה. הוכיחו כי אם $U(x)$ היא פונקציה זוגית אז ניתן למצוא בסיס $\{y_1,y_2\}$ למרחב הפתרונות של המשוואה (כלומר שתי פונקציות בת"ל שפותרות את המשוואה) שבו y_1 היא פונקציה זוגית ו- y_2 היא פונקציה אי-זוגית.

שאלה מס' 3: מצאו את כל הפתרונות של הבעיה הבאה:

$$\begin{cases} x^2y''-3xy'+4y=0 \\ y(0)=y'(0)=0 \end{cases}$$

שאלה מס' 4: תפתרו את הסעיפים הבאים בשיטת השוואת מקדמים:

א. $\begin{cases} y''-2y'+y=x\cdot e^x+4 \\ y(0)=y'(0)=1 \end{cases}$.

ב. $y^{(4)}-4y''=x^2+e^x$.

שאלה מס' 5: יהי $y(x)$ פתרון המשוואה $y'''+y''-y'-y=-e^{-x}$ המקיים את התנאים:

$$\begin{cases} y(0)=y'(0)=0 \\ y''(0)=\frac{1}{2} \\ \lim\limits_{x\to\infty} y(x)=0 \end{cases}$$

להראות שקיים פתרון אחד שמקיים את התנאים הנ"ל.

שאלה מס' 6: בהינתן הפונקציות $\begin{cases} f(x)=\cos(x) \\ g(x)=e^x \end{cases}$ מצאו את התשובה הנכונה והוכיחו למה היא נכונה, בנוסף גם הראו למה שאר התשובות אינן נכונות.

א. קיימת משוואה $y'+p(x)y=q(x)$ (כאשר הפונקציות $p(x),q(x)$ הן פונקציות רציפות על כל הישר), שהפונקציות $f(x),g(x)$ הן פתרונות שלה.

ב. קיימת משוואה $x^2y''+axy'+by=0$ עם מקדמים a,b ממשיים קבועים שונים מאפס, שהפונקציות $f(x),g(x)$ הן פתרונות שלה.

ג. קיימת משוואה $y''+p(x)y'+q(x)y=0$ (כאשר הפונקציות $p(x),q(x)$ הן פונקציות רציפות באינטרוול $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$), שהפונקציות $f(x),g(x)$ הן פתרונות שלה.

ד. קיימת משוואה לינארית הומוגנית מסדר 2 עם מקדמים קבועים ממשיים שונים מאפס שהפונקציות $f(x),g(x)$ הן פתרונות שלה.

ה. קיימת משוואה לינארית אי-הומוגנית מסדר 2 עם מקדמים קבועים ממשיים שונים מאפס שהפונקציות $f(x),g(x)$ הן פתרונות שלה.

בהצלחה