משוואות דיפרנציאליות רגילות

פתרון תרגיל בית מס' 7

שאלה מס' (1):

א) $y'' - 64y = 0$.

נציב $y = e^{kx}$ ונקבל:

$$\begin{cases} y' = k \cdot e^{kx} \\ y'' = k^2 e^{kx} \end{cases}$$

$$k^2 e^{kx} - 64 e^{kx} = 0$$

$$\Rightarrow \quad k^2 - 64 = 0$$

$$\Rightarrow \quad k^2 = 64$$

$$\Rightarrow \quad k = \pm 8$$

ולכן:

$$y_1(x) = e^{8x}$$

$$y_2(x) = e^{-8x}$$

ומשפט הקיום:

$$y(x) = C_1 e^{8x} + C_2 e^{-8x}$$

ב) $y'' - 7y' + 6y = 0$

משוואה אופיינית:

$$k^2 - 7k + 6 = 0$$

$$(k-6)(k-1) = 0$$

ומשפט הקיום:

$$y(x) = C_1 e^{x} + C_2 e^{6x}$$

ג)

$$\begin{cases} y'' + 9y = 0 \\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 \\ y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \end{cases}$$

משוואה אופיינית:

$$9k^2 + 1 = 0$$

$$k^2 = -\frac{1}{9}$$

$$k = \pm \frac{1}{3} \cdot i$$

ולכן:

$$y_1(x) = \cos\left(\frac{1}{3}x\right)$$

$$y_2(x) = \sin\left(\frac{1}{3}x\right)$$

ונציב בפתרון הכללי: $y(x) = C_1 \cdot \cos\left(\frac{1}{3}x\right) + C_2 \cdot \sin\left(\frac{1}{3}x\right)$

נקבל תנאי ראשון: $y\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 2$

$$2 = C_1 \cdot \underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{0} + C_2 \cdot \underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{1}$$

$$\Rightarrow C_2 = 2$$

שנגזור את הפתרון ונקבל תנאי ראשון: $y'\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0$

$$y'(x) = -\frac{C_1}{3} \cdot \sin\left(\frac{1}{3}x\right) + \frac{C_2}{3}\cos\left(\frac{1}{3}x\right)$$

$$0 = -\frac{C_1}{3}\underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{1} + \frac{C_2}{3}\underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{0}$$

$$\Rightarrow C_1 = 0$$

לכן פתרון הבעיה ההתחלית:

$$y(x) = 2 \cdot \sin\left(\frac{1}{3}x\right)$$

ג) $y^{(4)} - 13y'' + 36y = 0$

משוואת האופיינית:

$$k^4 - 13k^2 + 36 = 0$$

נסמן: $t = k^2$ ונקבל

$$t^2 - 13t + 36 = 0$$

$$(t-9)(t-4) = 0$$

$t = 9$ ← $k_1 = 3$, $k_2 = -3$

$t = 4$ ← $k_3 = 2$, $k_4 = -2$

לכן הפתרון הכללי:

$$y(x) = C_1 \cdot e^{3x} + C_2 \cdot e^{-3x} + C_3 \cdot e^{2x} + C_4 \cdot e^{-2x}$$

ג) $y''' - 2y'' + y' = 0$

משוואה אופיינית:

$$k^3 - 2k^2 + k = 0$$
$$k(k^2 - 2k + 1) = 0$$
$$k(k-1)^2 = 0$$

ולכן הפתרון הכללי:

$$y(x) = C_1 + C_2 \cdot e^x + C_3 \cdot x \cdot e^x$$

ו)
$$\begin{cases} 3y'' - 6y' + 30y = 0 \\ y\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0 \\ y'\left(\frac{\pi}{6}\right) = e^{\frac{\pi}{6}} \end{cases}$$

משוואה אופיינית:

$$3k^2 - 6k + 30 = 0 \quad /:3$$
$$k^2 - 2k + 10 = 0$$
$$k_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 40}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-36}}{2} = \frac{2 \pm 6i}{2} = 1 \pm 3i$$

והפתרון הכללי:

$$y(x) = C_1 e^x \cdot \cos(3x) + C_2 \cdot e^x \cdot \sin(3x)$$

נציב תנאי התחלה:

$$y\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0$$

$$0 = y\left(\frac{\pi}{6}\right) = C_1 \cdot e^{\frac{\pi}{6}} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + C_2 \cdot e^{\frac{\pi}{6}} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$$
($\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$)

$$\Rightarrow C_2 = 0$$

נגזור את הפתרון ונציב תנאי התחלה נוסף $y'\left(\frac{\pi}{6}\right) = e^{\frac{\pi}{6}}$

$$y'(x) = C_1 e^x \cos(3x) - 3C_1 e^x \sin(3x) + C_2 e^x \sin(3x) + 3C_2 e^x \cos(3x)$$

$$e^{\frac{\pi}{6}} = y'\left(\frac{\pi}{6}\right) = C_1 e^{\frac{\pi}{6}} \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - 3C_1 e^{\frac{\pi}{6}} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + C_2 e^{\frac{\pi}{6}} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + 3C_2 e^{\frac{\pi}{6}} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)$$
($\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$, $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$, $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$)

$$e^{\frac{\pi}{6}} = -3C_1 e^{\frac{\pi}{6}} + C_2 e^{\frac{\pi}{6}} \quad / : e^{\frac{\pi}{6}}$$

$$1 = -3C_1 \Rightarrow C_1 = -\frac{1}{3}$$

ולכן הפתרון הינו:

$$y(x) = -\frac{1}{3} e^x \sin(3x)$$

ג)

$$y^{(4)} - 16y = 0$$

משוואה אופיינית:

$$k^4 - 16 = 0$$

$$k^4 = 16$$

$$k_1 = 2 \;,\; k_2 = -2 \;,\; k_3 = 2i \;,\; k_4 = -2i$$

הפתרון הכללי:

$$y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} + C_3 \cos(2x) + C_4 \sin(2x)$$

ד)

$$y^{(8)} + 18y^{(4)} + 81y = 0$$

משוואה אופיינית:

$$k^8 + 18k^4 + 81 = 0$$

נסמן $t = k^4$ ונקבל:

$$t^2 + 18t + 81 = 0$$

$$(t+9)(t+9) = 0$$

$$\Rightarrow \quad k^4 = -9$$

$$r_k = \sqrt[4]{9}\left(\cos\left(\frac{\pi + 2\pi k}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi + 2\pi k}{4}\right)\right) \qquad k = 0,1,2,3$$

$$k=0: \quad r_0 = \sqrt[4]{9}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt[4]{9}\cdot\sqrt{2}}{2}\cdot(i+1)$$

$$k=1: \quad r_1 = \frac{\sqrt[4]{9}\cdot\sqrt{2}}{2}(i-1)$$

$$k=2: \quad r_2 = \frac{\sqrt[4]{9}\cdot\sqrt{2}}{2}\cdot(-i-1)$$

$$k=3: \quad r_3 = \frac{\sqrt[4]{9}\cdot\sqrt{2}}{2}\cdot(-i+1)$$

הפתרון הכללי:

$$y(x) = C_1 e^{\frac{\sqrt{6}}{2}x}\cos\left(\frac{\sqrt{6}}{2}x\right) + C_2\cdot x\cdot e^{\frac{\sqrt{6}}{2}x}\cos\left(\frac{\sqrt{6}}{2}x\right) + C_3\cdot e^{\frac{\sqrt{6}}{2}x}\sin\left(\frac{\sqrt{6}}{2}x\right) +$$

$$+ C_4 x e^{\frac{\sqrt{6}}{2}x}\cdot\sin\left(\frac{\sqrt{6}}{2}x\right) + C_5 e^{\frac{-\sqrt{6}}{2}x}\cos\left(\frac{\sqrt{6}}{2}x\right) + C_6\cdot x e^{\frac{-\sqrt{6}}{2}x}\cos\left(\frac{\sqrt{6}}{2}x\right) +$$

$$+ C_7\cdot e^{\frac{-\sqrt{6}}{2}x}\cdot\sin\left(\frac{\sqrt{6}}{2}x\right) + C_8 e^{\frac{-\sqrt{6}}{2}x}\cdot x\cdot\sin\left(\frac{\sqrt{6}}{2}x\right)$$

ג)
$$\begin{cases} y''' - 3y'' + 3y' - y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 2 \\ y''(0) = 3 \end{cases}$$

משוואת אופיינית: $k^3 - 3k^2 + 3k - 1 = 0$

$\Rightarrow (k-1)^3 = 0$

מכאן הפתרון הכללי:

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 x e^x + C_3 x^2 e^x$$

$$1 = y(0) = C_1 \Rightarrow C_1 = 1$$

נגזור את הפתרון:

$$y'(x) = C_1 e^x + C_2 e^x + C_2 x e^x + 2C_3 x e^x + C_3 x^2 e^x$$

$$2 = y'(0) = C_1 + C_2$$

$\Rightarrow 2 = 1 + C_2 \Rightarrow C_2 = 1$

נגזור:

$$y'(x) = e^x + e^x + x e^x + 2C_3 x e^x + C_3 x^2 e^x$$

$$y''(x) = 2e^x + e^x + x e^x + 2C_3 e^x + 2C_3 x e^x + C_3 x^2 e^x$$

$$3 = y''(0) = 2 + 1 + 2C_3$$

$\Rightarrow C_3 = 0$

הפתרון הכללי:

$$y(x) = e^x + x e^x = e^x(x+1)$$

ו) $y^{(7)} - y^{(4)} = 0$

משוואה אופיינית: $k^7 - k^4 = 0$

$$k^4(k^3 - 1) = 0$$

$k_1 = 0$ שורש 4

$$k^3 = 1$$

$$k_2 = 1$$

$$k_3 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

$$k_4 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

פתרון הכללי:

$$y(x) = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 x^3 + C_5 e^{x} + C_6 e^{-\frac{x}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + C_7 e^{-\frac{x}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$$

ג/

$$y^{(6)} - 12y^{(4)} + 48y'' - 64y = 0$$

משוואת אופיינית:

$$k^6 - 12k^4 + 48k^2 - 64 = 0$$

נסמן $t = k^2$ ונקבל:

$$t^3 - 12t^2 + 48t - 64 = 0$$

$$\Rightarrow (t-4)^3 = 0$$

$$\Rightarrow (k^2-4)^3 = 0$$

$$\Rightarrow (k-2)^3(k+2)^3 = 0$$

$k_1 = 2$ מרכיבי 3 , $k_2 = -2$ מרכיבי 3

והפתרון הכללי:

$$y(x) = e^{2x}\left(C_1 + C_2 x + C_3 x^2\right) + e^{-2x}\left(C_4 + C_5 \cdot x + C_6 \cdot x^2\right)$$

ד/

$$\begin{cases} y''' + y' = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \\ y''(0) = 2 \end{cases}$$

משוואת אופיינית:

$$k^3 + k = 0$$

$$\Rightarrow k(k^2+1) = 0$$

$$k_1 = 0$$

$$k^2 + 1 = 0 \Rightarrow k^2 = -1 \Rightarrow k_2 = i$$

$$k_3 = -i$$

פתרון בעיית ערך:

$$y(x) = C_1 + C_2 \cdot \cos(x) + C_3 \cdot \sin(x)$$

$$0 = y(0) = C_1 + C_2$$

$$y'(x) = -C_2 \sin(x) + C_3 \cdot \cos x$$

$$y''(x) = -C_2 \cos(x) - C_3 \sin(x)$$

$$1 = y'(0) = C_3$$

$$2 = y''(0) = -C_2$$

$$\Rightarrow \quad C_1 + C_2 = 0$$

$$C_1 - 2 = 0$$

$$C_1 = 2$$

הפתרון הכללי הוא:

$$y(x) = 2 - 2\cos x + \sin x$$

שאלה מס' (2):

$$y = v \cdot \frac{1}{x}$$

$$y' = v' \cdot \frac{1}{x} - v \cdot \frac{1}{x^2}$$

$$y'' = v'' \cdot \frac{1}{x} - 2v' \cdot \frac{1}{x^2} + 2v \frac{1}{x^3}$$

נציב במשוואה ההומוגנית:

$$x^2 v'' \cdot \frac{1}{x} - x^2 2v' \frac{1}{x^2} + x^2 v \frac{1}{x^3} - 3x\left(v' \frac{1}{x} - v \frac{1}{x^2}\right) + 5v \frac{1}{x} = x^3$$

$$xv'' + v'(-2-3) + v\left(\frac{2}{x} + \frac{3}{x} - \frac{5}{x}\right) = x^3$$

$$xv'' - 5v' = x^3$$

נסמן $t = v'$ ונקבל:

$$t' - \frac{5}{x} t = x^2$$

$$\mu(x) = e^{\int -\frac{5}{x} dx} = e^{-5\ln x} = \frac{1}{x^5}$$

$$\left(t \cdot x^{-5}\right)' = x^{-3}$$

$$t \cdot x^{-5} = -\frac{1}{2} x^{-2} + C_1$$

$$t = v' = C_1 \cdot x^5 - \frac{1}{2} x^3$$

$$v = C_1 x^6 - \frac{x^4}{8} + C_2$$

$$y = C_1 x^5 + \frac{C_2}{x} - \frac{x^3}{8}$$

שאלה מס' (3):

$$y_h = C_1 + C_2 x + C_3 \cdot x^2 + C_4 \cdot e^{-x} \cdot \sin(2x) + C_5 \cdot e^{-x} \cdot \cos(2x) =$$

$$= C_1 \cdot e^{0 \cdot x} + C_2 \cdot x \cdot e^{0 \cdot x} + C_3 \cdot x^2 \cdot e^{0 \cdot x} + C_4 \cdot e^{-1 \cdot x} \cdot \sin(2x) + C_5 \cdot e^{-1 \cdot x} \cdot \cos(2x)$$

מהפתרון נובע כי:

$$r_1 = r_2 = r_3 = 0 \quad , \quad r_{4,5} = -1 \pm 2i$$

נמצא משוואה ממעלה שניה שפתרונותיה (r_4 ו-r_5) הם

$$\left[r - (-1+2i)\right] \cdot \left[r - (-1-2i)\right] = r^2 + Br + C$$

$$B = -\left(r_4 + \overline{r_4}\right) = -2\,\mathrm{Re}\{r_4\} = -2 \cdot (-1) = 2$$

$$C = r_4 \cdot \overline{r_4} = |r_4|^2 = 1 + 4 = 5$$

לכן המשוואה האופיינית היא:

$$r^3 \cdot \left(r^2 + 2r + 5\right) = r^5 + 2r^4 + 5r^3 = 0$$

והמשוואה הדיפרנציאלית היא:

$$y^{(5)} + 2y^{(4)} + 5y^{(3)} = 0$$

שאלה מס' (4):

$$y'' + \lambda y = 0$$

$$y(0) = y(\pi) = 0$$

$$r^2 + \lambda = 0$$

1) אם $\lambda < 0$ אז $r = \pm\sqrt{\lambda}$

$$y = C_1 \cdot \cosh(\sqrt{\lambda}x) + C_2 \cdot \sinh(\sqrt{\lambda}x)$$

$$y(0) = C_1 = 0$$

$$y(\pi) = C_2 \cdot \sinh(\pi\sqrt{\lambda}) = 0$$

מכאן: אז בהכרח $C_2 = 0$

סה"כ: $\lambda = n^2$ כאשר $n = 0, 1, 2, \ldots$

אז בהכרח $C_2 = 0$

מכאן כי אזור $\lambda = n^2$ זו פתרון של המשוואה.

ב) $\lambda = 0$ אז $r^2 = 0$

$$r_{1,2} = 0$$

$$y = c_1 + c_2 x$$

$$y(0) = c_1 = 0$$

$$y(\pi) = c_2 \pi = 0 \quad \Rightarrow \quad c_2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad y \equiv 0$$

אין פתרון שאינו טריוויאלי עבור $\lambda = 0$.

ג) $\lambda < 0$ אז נסמן $\lambda = -\mu$ כאשר: $\mu > 0$

$$r^2 - \mu = 0$$

$$r_1 = \sqrt{\mu} \quad , \quad r_2 = -\sqrt{\mu}$$

הפתרון הכללי:

$$y = c_1 \cdot e^{\sqrt{\mu} x} + c_2 \cdot e^{-\sqrt{\mu} x}$$

$$y(0) = c_1 + c_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad c_2 = -c_1$$

$$y(\pi) = c_1 e^{\pi\sqrt{\mu}} + c_2 e^{-\pi\sqrt{\mu}} = 0$$

$$\Rightarrow \quad c_1 \left(e^{\pi\sqrt{\mu}} - e^{-\pi\sqrt{\mu}} \right) = 0$$

$$\Rightarrow \quad c_1 = 0$$

אזי $c_2 = 0$

$$\Rightarrow \quad y \equiv 0$$

אין פתרון שאינו טריוויאלי אזי עבור כל λ (כאשר $\lambda < 0$) שערכו שלילי.

שאלה מס' (5):

הפתרון הכללי:

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 x e^x + c_3 \cos x + c_4 \sin x$$

(ה)

$$y(0) = C_1 + C_3 = \alpha$$

$$y'(x) = C_1 e^x + C_2 e^x + C_2 x e^x - C_3 \sin x + C_4 \cos x$$

$$y'(0) = C_1 + C_2 + C_4 = \beta$$

$$y''(x) = C_1 e^x + 2C_2 e^x + C_2 x e^x - C_3 \cos x - C_4 \sin x$$

$$y''(0) = C_1 + 2C_2 - C_3 = \gamma$$

ניקח כן:

$$\begin{cases} C_1 + C_3 = \alpha \\ C_1 + C_2 + C_4 = \beta \\ C_1 + 2C_2 - C_3 = \gamma \end{cases}$$

כדי לקבל פתרון הומוגני נבחר $C_1 = C_2 = 0$ ונקבל:

$$\begin{cases} C_3 = \alpha \\ C_4 = \beta \\ -C_3 = \gamma \end{cases}$$

שלם $\alpha + \gamma = 0$ לכן $\gamma = -\alpha$ ונקבל המשוואה הנבדקת הינו β.

שאלה מס' (9):

נוכיח תחילה על פתרון המשוואה הכוללת את אי-הומוגניות הבאה:

$$y(x) = x^{1-s} \cdot e^{\alpha x} \left(\cos(\beta x) + \sin(\beta x) \right)$$

נשים s הינו הגבוהה על אחד $\beta i + \alpha = r$, כלומר:

$$s = 1 \quad , \quad \alpha = 0 \quad , \quad \beta = 1$$

נמצא $i \pm = r$ שזהו שורש הפולינום 9 ונקבל הפולינום האופייני הינו:

$$(1+r^2)^9 = 1$$

$$= 1 + 9r^2 + 36r^4 + 84r^6 + 126r^8 + 126r^{10} + 84r^{12}$$

לכן הסדר המינימלי של המשוואה הינו 12.