# משוואות דיפרנציאליות רגילות

## פתרון תרגיל בית מס' (6).

**שאלה מס' (1):**

הפתרון של המד"ר הינו $y(x) = \pm\sqrt{\frac{x}{1}+C}$

ומכיוון ש- :

$y(1) = \pm\sqrt{1+C}$

אנו יודעים כי הפתרונות בה- $x=1$ שווים ל- $1$, משמעות

שהמספר הממשי $C$ חייב להיות $C>0$.

אזי: $C = y(1)^2 - 1$

כלומר $y(x)$ פתרון המקיים $y(1) < 1$, וכל $y(x)$ פתרון.

תהי $\varepsilon > 0$ מספיק קטן, כך ש- $\varepsilon < |y(1) - (y(1))'|$ אזי:

$y(1) > y(1) - \varepsilon$ $\Leftarrow$ $y(1) + \varepsilon > (y(1))' > y(1) - \varepsilon$ $\Leftarrow$ $y(1) + \varepsilon > y(1)$

$(y(1))' < 1$ $\Leftarrow$ $y(1) < 1$ $\Leftarrow$ $y(1) + \varepsilon < (y(1))'$

מתקיים:

$$|y(x) - (y(1))'| = \left|\sqrt{\frac{1}{x}+1-y(1)^2} - \sqrt{\frac{1}{x}+1-(y(1))^2}\right| =$$

$$= \left|\frac{\left(\frac{1}{x}+1-y(1)^2\right) - \left(\frac{1}{x}+1-(y(1))^2\right)}{\sqrt{\frac{1}{x}+1-y(1)^2} + \sqrt{\frac{1}{x}+1-(y(1))^2}}\right| = \left|\frac{y(1)^2 - (y(1))^2}{\sqrt{\frac{1}{x}+1-y(1)^2} + \sqrt{\frac{1}{x}+1-(y(1))^2}}\right| =$$

$$= \left|\frac{\left(y(1)+(y(1))'\right)\cdot\left(y(1)-(y(1))'\right)}{\sqrt{\frac{1}{x}+1-y(1)^2} + \sqrt{\frac{1}{x}+1-(y(1))^2}}\right| \geq \left|\frac{\left(y(1)+(y(1))'\right)\left(y(1)-(y(1))'\right)}{\sqrt{1-y(1)^2} + \sqrt{1-(y(1))^2}}\right| \geq$$

הכפלנו מונה ומכנה ב- $\sqrt{\frac{1}{x}+1-y(1)^2} + \sqrt{\frac{1}{x}+1-(y(1))^2}$

ומשום כי $\left|y(1)-(y(1))'\right| \geq \left|\frac{y(1)\,\varepsilon}{\sqrt{1-y(1)^2}}\right|$

אחרי הצמצום הקיבלנו

$$> \frac{y(1)\,\varepsilon}{\sqrt{1-y(1)^2}} \cdot \varepsilon > \frac{y(1)\,\varepsilon}{\sqrt{1-y(1)^2}} \cdot \varepsilon$$

$(y(1))' > (y(1))^2$ ולכן:

$y(1) + \varepsilon > (y(1))^2$ ובמעבר לצד השני קיבלנו את

המבוקש.

---

(1) כלומר $y(x)$ יציב אסימפטוטית.

יהי $\varepsilon > 0$ כלשהו. אזי קיים $\delta > 0$ כך ש- $|y(1)-(y(1))'| < \delta$ אזי $|y(x)-(y(x))'| < \varepsilon$

(2)

הוכיחו שמספר הפתרונות בקטע $(-9,3)$ של המשוואה $f(x)=g(x)$ שאבחנתם שהוא יחיד. מהו $f(x)=g(x)$ שעבורו יש לפחות שני פתרונות שונים שאחד מהם הוא $x_0$ ושעבורו המשיק לגרף $f$ בנקודה $(x_0,f(x_0))$ עובר דרך הנקודה $(-9,3)$? הוכיחו שאכן קיים רק $x_0$ אחד כזה ומצאו אותו.

נגדיר $h(x)=f(x)-g(x)$. מספיק להראות ש-$h$ יש בדיוק פתרון אחד בקטע $(-9,3)$.

$h(-9)=f(-9)-g(-9)=3-3=0$ ולכן $-9$ הוא פתרון.

$h(3)=f(3)-g(3)=3-3=0$ ולכן $3$ הוא פתרון.

$h'(x)=f'(x)-g'(x)$ ולכן $h'(-6)=f'(-6)-g'(-6)=2-0=2>0$.

$h''(x)=f''(x)-g''(x)$ ולכן $h''(-6)=f''(-6)-g''(-6)=0-0=0$.

$h'''(x)=f'''(x)-g'''(x)$ ולכן $h'''(-6)=f'''(-6)-g'''(-6)=9>0$.

$h''(-6)=0$ ו-$h'(-6)>0$ ו-$h'''(-6)>0$ אז $-6$ הוא נקודת פיתול עולה של $h$.

נניח בשלילה שיש עוד פתרון $x_1$ של $h(x)=0$. אז $h(x_1)=0$.

אם $x_1<-6$ אז $h(-9)=h(x_1)=0$ ולכן לפי משפט רול יש $c\in(-9,x_1)$ כך ש-$h'(c)=0$.

אם $x_1>-6$ אז $h(x_1)=h(3)=0$ ולכן לפי משפט רול יש $c\in(-6,3)$ כך ש-$h'(c)=0$.

בשני המקרים יש $c$ כך ש-$h'(c)=0$ ו-$h''(-6)=0$ ו-$h'''(-6)>0$ ולכן $-6$ הוא נקודת פיתול עולה של $h$.

אבל $h'(-6)>0$ ולכן $-6$ לא יכול להיות נקודת פיתול עולה של $h$.

לכן אין עוד פתרון $x_1$ של $h(x)=0$.

שאלה מס' (4): נתונים שני הפתרונות $y_1, y_2$ בקבה המשוואה:

$$y_1 = \sqrt{x} \quad , \quad y_1' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad , \quad y_1'' = \frac{-1}{4x^{\frac{3}{2}}}$$

$$y_2 = 1 \quad , \quad y_2' = 0 \quad , \quad y_2'' = 0$$

עבור $y_1$:

$$\sqrt{x} \cdot \left| \frac{-1}{4x^{\frac{3}{2}}} + \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^2 + \frac{1}{4x} = 0 \right.$$

עבור $y_2$:

$$1 \cdot 0 + 0^2 = 0$$

נתונים גם $z = c_1 + c_2\sqrt{x}$ פתרון:

$$z = c_1 + c_2\sqrt{x} \quad , \quad z' = \frac{c_2}{2\sqrt{x}} \quad , \quad z'' = -\frac{c_2}{4x^{\frac{3}{2}}}$$

נציב במשוואה:

$$= \left(\frac{c_2}{2\sqrt{x}}\right)^2 + \left(-\frac{c_2}{4x^{3/2}}\right) \cdot (c_1 + c_2\sqrt{x})$$

$$= \frac{c_2^2}{4x} - \frac{c_2^2}{4x} - \frac{c_1 c_2}{4x^{\frac{3}{2}}} = -\frac{c_1 c_2}{4x^{\frac{3}{2}}} \neq 0$$

מכיוון שאחרת הפתרונה <u>אינה פתרון</u> אלא הסופרפוזיציה של פתרון הומוגני ופתרון פרטי.

שאלה מס' (5):

א) נתונים שני פתרונות $y_1, y_2$ בקבה:

$$y_1 = 1 \quad , \quad y_1' = 0 \quad , \quad y_1'' = 0 \quad , \quad y_1''' = 0$$

$$y_2 = x \quad , \quad y_2' = 1 \quad , \quad y_2'' = 0 \quad , \quad y_2''' = 0$$

$$y_3 = x^3 \quad , \quad y_3' = 3x^2 \quad , \quad y_3'' = 6x \quad , \quad y_3''' = 6$$

עבור $y_1$:

$$0 = 0 - 0 \cdot x \quad \checkmark$$

עבור $y_2$:

$$0 = 0 - 0 \cdot x \quad \checkmark$$

עבור $y_3$:

$$0 = 6x - 6x \cdot 1 \quad \checkmark$$

ג) דרך I:

$$W(y_1,y_2,y_3) = \begin{vmatrix} x^3 & x & 1 \\ 3x^2 & 1 & 0 \\ 6x & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= x^3(0-0) - x(0-0) + 1(0-6x) = -6x$$

דרך II: נוסחת אבל

$$W(x) = C \cdot e^{-\int -\frac{1}{x}dx} = C \cdot e^{\ln x} = Cx$$

ד) $W(x)$ כשאר $x=0$. כי נשים לב שהמשוואה אחרי הנרמול היא:

$$y''' - \frac{1}{x} \cdot y'' = 0$$

כלומר המקדמים של המשוואה שלנו בקטע בו- $x=0$. תכן של קודה המצבה הקלאסי שהורונסקיאן משולש צורותיה או בכלל שלא, אולם מצאנו שהורונסקיאן משולש כך בנקודה מסוימת $x=0$.

אך מכיוון שמצאנו שמקדמי המשוואה אינם רציפים בנ- $x=0$ נראה אין שום סיבה שנצפה שיתקיימו הקלאסיים של הורונסקיאן.