מחשוון דיפרנציאלי רביעי

פתרון תרגיל בית מס' 5

שאלה מס' (1):

כיוון ש- f'_1, f'_2 רציפות בכל המישור, אזי פתרונות אותה מתכנסת.

הפתרונות שלהן אותה כי יש לנו תנאי זהה ש- x_1.

נניח בשלילה כי קיים $x_2 \neq I$ שעבורו $\varphi_1(x_2) \neq \varphi_2(x_2)$, ונגדיר:

$$f(x) = \varphi_1(x) - \varphi_2(x)$$

$f(x)$ רציפה כי $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ רציפות (נתון כי הפתרונות מוגדרים על כל I)

בנוסף מתקיים:

$$f(x_1) = \varphi_1(x_1) - \varphi_2(x_1) > 0$$

$$f(x_2) = \varphi_1(x_2) - \varphi_2(x_2) < 0$$

לכן ע"פ משפט קיים x_3 בין x_1 ל- x_2 שעבורו:

$$f(x_3) = \varphi_1(x_3) - \varphi_2(x_3) = 0$$

לכן $\varphi_1(x_3) = \varphi_2(x_3)$ בסתירה לכך שפתרונות אותה מתכנסת.

לכן $\varphi_1(x) > \varphi_2(x)$ לכל $x \in I$.

שאלה מס' (2): קודם כל נשים לב כי:

$$f(x,y) = x(x^2+y^4)^4$$

$$f'_y(x,y) = 4x(x^2+y^4)^3 \cdot 4y^3$$

פונ' רציפות בכל המישור ולכן פתרונות אותה של המד"ר אינה מתכנסת.

כי $\varphi(x) = \psi(x)$ פתרון המוגדר על קטע סמוכי ונגדיר $\varphi(x) = \psi(x)$

על כקטע הסמוכי.

נוכיח כי $\varphi(x) = \psi(x)$ ע"י כן שנוכיח כי $\varphi(x)$ הינו פתרון על המד"ר שמקיים תנאי ההתלכדות בנקודה x_0- $\psi(x)$.

$$\varphi'(x) = \left(\psi(x-1)\right)' = \psi'(x-1) = 4(x-1)^3 + 2(x-1) = 4(x-1)^3 + 2x - 2 =$$

$$= 4x^3 + 2x - 12x^2 + 12x - 4 = 4x^3 + 2x^2(-3x+6) + x(-3x+6) + 2x^2 + 4(x-1)^3$$

מתקיים $\varphi(0) = \psi(0-1) = \psi(-1) = 0$. בנוסף ברור כי $\varphi(x)$ פתרון.

מכאן שמי קיום ויחידות:

$$\varphi(x) = \psi(x) = \psi(x-1) .$$

(1)

שאלה מס' (3):

נגדיר $h(x)=(1+x)g$ ונשים כי $h(x)$ מקיים את תנאי משוואת ז'נרו-צ'בישב:

$$h'(x)=g'(1+x)$$

הפונקציה $g(x)$ הינו פתרון של המשוואה, כלומר מקיים אותה עבור כל x בפרט עבור $1+x$, לכן:

$$h'(x)=g'(1+x)=(1+x)g+(1+x)^2g\cdot\left(\left(\pi(1+x)\right)\sin^4\right)=(1+x)g+(1+x)^2g\cdot(\pi x)\sin^4$$

מתקיים:

$$\left(\pi(1+x)\right)\sin^4=(\pi x)\sin^4$$

כי $\sin$ הינה פונ' זוגית.

בנוסף: $h(x)=(1+x)g$, $h^2(x)=(1+x)^2g$

אז נשארנו במצב:

$$h'(x)=h(x)+h^2(x)\cdot(\pi x)\sin^4$$

אז $h(x)$ מקיים את תנאי משוואת, ולכן:

$$h(0)=(1)g=(0)h$$

נתון

לכן $h(x)$, $g(x)$ פתרונות לבעיה משוואת ומקיימים תנאי התחלה.

כמו כן תנאי משפט קיום ויחידות מתקיים כי הפונקציה

$$f(x,y)=y+y^2\cdot(\pi x)\sin^4$$

הינו פונקציה הקבה בשני משתנים, לכן:

$$h(x)=(x)g=(1+x)g$$

לכן $g(x)$ הינו פונקציה מחזורית עם מחזוריות 1.

שאלה מס' (4):

נוכיח ע"י שימוש בעקרון המקסימום החזק ובתכונות הרמוניות שהפתרון היחיד למשוואה הנתונה עם התנאים ההתחלה והשפה הנתונים הוא $u(x,y)=0$.

נניח בשלילה כי $u(x,y)$ הוא פתרון שאינו זהותית אפס. נשים לב כי $u(0,0)=0$ ולכן לפחות באחד מהרביעים הראשונים או השניים חייבת להיות נקודה שבה u מקבלת ערך חיובי. נניח בה"כ שזה ברביע הראשון (אחרת נחליף את u ב-$-u$).

נסמן ב-D את הרביע הראשון, כלומר $D=\{(x,y)\mid x>0,\ y>0\}$. נגדיר פונקציה עזר $v(x,y)=\arctan(y/x)$. נשים לב כי v הרמונית ב-D (כי היא הארגומנט של הפונקציה ההרמונית $\ln(x+iy)$), ומתקיים $0<v(x,y)<\frac{\pi}{2}$ לכל $(x,y)\in D$.

נגדיר $w=u+\varepsilon v$ עבור $\varepsilon>0$ קטן מספיק כך ש-$w(0,1)>0$. אז w הרמונית ב-D ומקבלת ערך חיובי בנקודה $(0,1)$.

נשים לב כי על הגבול ∂D מתקיים:
- על הציר $x=0$: $u(0,y)=0$ ו-$v(0,y)=\frac{\pi}{2}$, לכן $w(0,y)=\varepsilon\frac{\pi}{2}$.
- על הציר $y=0$: $u(x,0)=0$ ו-$v(x,0)=0$, לכן $w(x,0)=0$.

לכן $w\le \varepsilon\frac{\pi}{2}$ על כל ∂D.

מכיוון ש-w הרמונית ב-D ומקבלת ערך חיובי בנקודה $(0,1)$, לפי עקרון המקסימום החזק w מקבלת את ערכה המקסימלי בתוך D או על חלק מהשפה שאינו $\{x=0\}$. אבל $w(0,y)=\varepsilon\frac{\pi}{2}$ ו-$w(x,0)=0$, ולכן המקסימום חייב להתקבל על $\{x=0\}$.

מעקרון המקסימום החזק נובע שאם w מקבלת מקסימום בנקודה פנימית של D אז w קבועה. אבל $w(0,y)=\varepsilon\frac{\pi}{2}$ ו-$w(x,0)=0$, סתירה.

לכן w מקבלת את המקסימום רק על $\{x=0\}$, כלומר $w(x,y)\le \varepsilon\frac{\pi}{2}$ לכל $(x,y)\in D$.

נשאיר ε ונשלח $\varepsilon\to 0$. נקבל $u(x,y)\le 0$ לכל $(x,y)\in D$.

באופן דומה, אם u חיובית ברביע השני, נגדיר $v(x,y)=\arctan(y/(-x))$ ונקבל $u(x,y)\le 0$ ברביע השני.

נניח כעת כי $u(x,y)<0$ בנקודה כלשהי (x_0,y_0) ברביע הראשון. נגדיר $w=u-\varepsilon v$ עבור $\varepsilon>0$ קטן מספיק כך ש-$w(0,1)<0$. אז w הרמונית ב-D ומקבלת ערך שלילי בנקודה $(0,1)$.

נשים לב כי על הגבול ∂D מתקיים:
- על הציר $x=0$: $u(0,y)=0$ ו-$v(0,y)=\frac{\pi}{2}$, לכן $w(0,y)=-\varepsilon\frac{\pi}{2}$.
- על הציר $y=0$: $u(x,0)=0$ ו-$v(x,0)=0$, לכן $w(x,0)=0$.

לכן $w\ge -\varepsilon\frac{\pi}{2}$ על כל ∂D.

מכיוון ש-w הרמונית ב-D ומקבלת ערך שלילי בנקודה $(0,1)$, לפי עקרון המקסימום החזק w מקבלת את ערכה המינימלי בתוך D או על חלק מהשפה שאינו $\{x=0\}$. אבל $w(0,y)=-\varepsilon\frac{\pi}{2}$ ו-$w(x,0)=0$, ולכן המינימום חייב להתקבל על $\{x=0\}$.

מעקרון המקסימום החזק נובע שאם w מקבלת מינימום בנקודה פנימית של D אז w קבועה. אבל $w(0,y)=-\varepsilon\frac{\pi}{2}$ ו-$w(x,0)=0$, סתירה.

לכן w מקבלת את המינימום רק על $\{x=0\}$, כלומר $w(x,y)\ge -\varepsilon\frac{\pi}{2}$ לכל $(x,y)\in D$.

נשאיר ε ונשלח $\varepsilon\to 0$. נקבל $u(x,y)\ge 0$ לכל $(x,y)\in D$.

מכיוון ש-$u(x,y)\le 0$ ו-$u(x,y)\ge 0$ ברביע הראשון, נובע ש-$u(x,y)=0$ ברביע הראשון.

באופן דומה, אם u שלילית ברביע השני, נגדיר $v(x,y)=\arctan(y/(-x))$ ונקבל $u(x,y)\ge 0$ ברביע השני. מכיוון ש-$u(x,y)\le 0$ ו-$u(x,y)\ge 0$ ברביע השני, נובע ש-$u(x,y)=0$ ברביע השני.

מכיוון שהפתרון u הוא רציף ב-$\mathbb{R}^2$ ומתאפס ברביעים הראשון והשני, הוא חייב להתאפס גם על הצירים (מהגבול הרציפות) ולכן הפתרון שלנו הוא $u(x,y)=0$ בכל המישור.

הוא נמצא בקטע $0<x$ ולכן מצד שני כנדרש:

$$0<x$$

$$0<\arctan(y^2+x^2)$$

($\arctan$ מוגדרת כחיובית עבור $y=1$)

$$0<y$$

ניתן להגדיר את הפונקציה $\arctan$ כך שתהיה חיובית בנקודה הנתונה.

הוא נמצא בקטע $x<0$ ולכן מצד שני כנדרש:

מכיוון שהפתרון מתקיים תוך שבב ל- $x<0$ ולכן הפתרון מוגדר בקטע זה.

ולכן הפתרון מתקיים בקטע $y=0$ הינו פתרון סינגולרי שאינה מהפתרון שלנו ושהמקיים תנאי ההתחלה והשפה המשפט קיום ויחידות לא יתקיים.

נקבל כי: $u(x)>0$ לכל $x\in\mathbb{R}$ ו $u(x)\le 1$

ומתוך ההנחה על פתרונות (שקיים והמוגדר) השפה שלנו תהיה מוגדרת בכל המישור.

שאלה מס' (5): נסמן:

$$f(x,y) = \frac{y}{7+x} + \sin\left(\frac{\pi}{7+x}\right)$$

מדוע פונקציה נגזרת בסביבת $(0,0)$

$$f'_y(x,y) = \frac{1}{7+x} + \frac{\pi}{7+x} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{7+x}\right)$$

ומה גם פונקציה נגזרת בסביבת $(0,0)$. לכן תנאי מספק קיום ויחידות מתקיים.

בנוסף רואים כי $y \equiv 0$ הינו פתרון טריוויאלי. (שפלוי מקיים תנאי ההתלה)

בנוסף רואים כי $y = 7+x$ הינו גם פתרון (לא מקיים תנאי ההתלה)

~~[illegible]~~

נסביר מדוע $y = 7+x$ פתרון:

$$y' = 1 = (7+x)' = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{7+x}\right)}{\left(\frac{7+x}{x}\right)^2} + \frac{7+x}{7+x}$$

$$0 \qquad\qquad 1$$

$$1 = 1 \quad \text{כן}$$

לכן פתרון.

לגבי תנאי קיום ויחידות פתרונות שונים שלו מתקבלת לכן:

$$y = 7+x+\sin\left(\frac{\pi}{7+x}\right) > 7+x \geq 0$$

לכן שאכן מתקיים $x \geq 0$. כלומר אותו פתרון.