משוואות דיפרנציאליות רגילות -- תרגיל בית מס' 5

שאלה מס' 1:

תהי $y'=f(x,y)$ כאשר f, f'_y רציפות בכל המישור. נניח ש- $y_1(x), y_2(x)$ פתרונות המוגדרים על קטע I, ושעבור $x_1 \in I$ כלשהו מתקיים $y_1(x_1) < y_2(x_1)$. הראו כי לכל $x \in I$ מתקיים $y_1(x) < y_2(x)$.

שאלה מס' 2:

תהי $y' = x\left(x^2+y^2\right)^4$. הוכיחו כי כל פתרון המוגדר על קטע סימטרי סביב הראשית הינו פונקציה זוגית.

שאלה מס' 3:

נתונה המשוואה $y' = \sin^4(x\pi)y^2 + y$. נתון גם כי $y(x)$ הוא פתרון למשוואה המוגדר לכל $x \in \mathbb{R}$, ונתון כי $y(0) = y(1)$. הוכח כי $y(x)$ היא פונקציה מחזורית עם מחזוריות 1.

תזכורת: אם $y(x)$ היא פונקציה מחזורית עם מחזוריות 1 אז היא צריכה לקיים $y(x) = y(x+1)$.

שאלה מס' 4:

נתונה המשוואה $y' = -\arctan\left(x^2+y^2\right)\cdot y \cdot x$. הסבירו באמצעות שדה הכיוונים למה הפתרון שמקיים את תנאי ההתחלה $y(0)=1$, מוגדר לכל $x \in \mathbb{R}$.

שאלה מס' 5:

תהי $y' = \frac{y}{x+7} + \sin\left(\frac{\pi y}{x+7}\right)$, בתחום $x \geq 0$. ויהי $y(x)$ פתרון שלה המקיים תנאי התחלה $y(0)=0$.

הוכיחו כי $0 \leq y(x) < 7x+100$.

בהצלחה