מטלות מנחות למשוואות דיפרנציאליות רגילות

פתרון תרגיל בית מס' 1

שאלה מס' 1:

א) סדר 1 ולא לינארי

ב) סדר 1 ולא לינארי

ג) סדר 1, לינארי

ד) סדר 2, לינארי ~~סדר~~

ה) סדר 2, ולא לינארי

ו) סדר 2, לינארי.

שאלה מס' 2:

א)

$$y' = y - x \cdot e^{\frac{x}{y}}$$

משוואה זו הינה משוואה הומוגנית לכן נציב $\frac{x}{y} = v$

ולאחר גזירה נקבל: $y = x \cdot v$

נציב ב- $y' = v + x \cdot v'$

נציב ונקבל:

$$v + x \cdot v' = v - e^{v}$$

לכן לאחר צמצום ו v נקבל:

$$x \cdot v' = -e^{v} \Rightarrow$$

$$\frac{v'}{e^{v}} = \frac{x'}{x} \Rightarrow$$

$$\int \frac{v'}{e^{v}} = -\int \frac{x'}{x} \quad , \quad x \neq 0$$

נבין כי אלו פונקציות סינגולריות כאלו.

כעת נחשב את האינטגרל בצד $\int \frac{e^{v}}{v'}$ נשתמש בהצבה

$e^{v} = u$

$v' dv = du$

נקבל: $\int \frac{e^{v}}{v'} = \int \frac{u}{u'} dv = -u$

ונקבל:

$$-\frac{1}{e^{v}} = \ln|x| + C_1$$

$$-\frac{1}{e^y} = \ln|x-1| + C \quad / \cdot(-1)$$

$$e^{-y} = \ln|x-1| + C$$

$$e^{-\frac{x}{y}} = \ln|x| + C$$

ב) $$xy' - y(2+x) = 0$$

$$y' = \frac{y(2+x)}{x} \quad (*)$$

משוואת משפחת הזוויות, לכן נציב $\frac{x}{y} = v$

$$y = xv$$

$$\Leftarrow \quad y' = v + xv'$$

משלוב נתונים את המשוואה $(*)$ מקבלת:

$$y' = \frac{y}{x}2 + 1$$

נציב את $\frac{x}{y} = v$ ונתון $y' = v + xv'$ ונקבל:

$$v + xv' = 2v + 1$$

$$\Leftarrow \quad \frac{dv}{v} = \frac{dx}{x+1}$$

$$\int \frac{dv}{v} = \int \frac{dx}{x+1} \quad , \quad x \neq 0 \ , \ x \neq -1$$

נבין כי קיים פתרון סינגולרי אחד שהוא $v = -1$

ומכאן נקבל $x = -y$ שהוא גם פתרון סינגולרי

של $(*)$.

כעת אחרי חילוק נוכל מקבילה:

$$\ln|v+1| = \ln|x| + C \quad / \cdot 2$$

$$v \cdot C = x + 1$$

$$\frac{x}{y} \cdot C = x + 1$$

ומכאן פתרון כללי בצורה סתומה.

ג) $\frac{y-x2}{x-y} = y$ $(*)$ כך שמשוואת משפחת הזוויות, נתון נציב:

(3) נשתמש בהצבה (*) ונקבל את המשוואה הבאה ב- x ונקבל:

$$y' = \frac{3 - \frac{y}{x}4}{\frac{y}{x} - 2}$$

מתי נקבל $\frac{y}{x} = v$ כי $y' = x'v + v$ ונקבל:

$$x'v + v = \frac{3 - 4v}{v - 2}$$

$$x'v = \frac{3 - 4v}{v - 2} - v = \frac{3 - 4v - v^2 + 2v}{v - 2}$$ כלומר

$$x'v = \frac{3 - 2v + v^2}{v - 2}$$ כלומר

$$\frac{dv}{dx} \cdot x = \frac{3 - 2v + v^2}{v - 2}$$

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{(v-2)}{3 - 2v + v^2} dv$$ כלומר

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{(v-2)}{(v+3)(v-1)} dv$$ # $v \neq -3, 1$, $x \neq 0$,

שלב הבא הוא פירוק ל2 פשוטים של $v = -3, 1$ ומכאן נקבל

$$y = x$$ ו $y = -3x$

שלא נצטרך בדיקה נציב ב- (*) נקבל שרשה שלנו פתרון שווה.

כדי לחשב את השוויון נקבל ב- # נפתח לשברים:

$$\frac{v-2}{(v+3)(v-1)} = \frac{A}{v-1} + \frac{B}{v+3} = \frac{A(v+3) + B(v-1)}{(v-1)(v+3)} =$$

$$= \frac{(A+B)\cdot v + 3A - B}{(v-1)(v+3)} =$$

נפתור:

$$A + B = -1 \quad (1)$$

$$3A - B = 2 \quad (2)$$

מכאן נציב ב- (2) $B = -1 - A$ ונקבל:

$$3A + 1 + A = 2$$

$$4A = 1$$

$$A = \frac{1}{4}$$ כלומר $B = -\frac{5}{4}$

כלומר:

$$\frac{v-2}{(v+3)(v-1)} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{(v-1)} - \frac{5}{4} \cdot \frac{1}{(v+3)}$$

שאלה (4)

מכאן קיבלנו:

$$\int \frac{(x-2)}{x^2+2x-3}\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{5}{4}\int \frac{dx}{x+3} = \frac{1}{4}\ln|x-1| - \frac{5}{4}\ln|x+3|$$

ונסמן:

$$\frac{1}{4}\ln|x-1| - \frac{5}{4}\ln|x+3| = \ln|x| + C_1 \quad /\cdot 4$$

$$\ln\left[(x-1)^{\frac{1}{4}}\right] - \ln\left[(x+3)^{\frac{5}{4}}\right] = \ln|x| + C_1$$

$$\ln\left[\frac{|x-1|^{\frac{1}{4}}}{|x+3|^{5/4}}\right] = \ln|x| + C_1 \quad /e^x$$

$$\sqrt[4]{\frac{(x-1)}{(x+3)^5}} = C\cdot x$$

נחליף משתנה מקורי $\frac{y}{x} = v$:

$$\sqrt[4]{\frac{\left(\frac{y}{x}-1\right)}{\left(\frac{y}{x}+3\right)^5}} = C\cdot x$$

נרצה לסמן כללי בצורה סימטרית.

ד. $y' = \frac{3y^2+x^2}{2xy}$ נרצה משוואה מ"ש הומוגנית נלכן נציב $\frac{y}{x} = v$

$$y = x\cdot v$$

$$y' = v + x\cdot v'$$

מלקים את המונה והמכנה ב- x^2 ונקבל:

$$y' = \frac{3\frac{y^2}{x^2}+1}{2\frac{y}{x}}$$

מציבים $\frac{y}{x} = v$ ו- $y' = v + x\cdot v'$:

$$v + x\cdot v' = \frac{3v^2+1}{2v}$$

$$x\cdot v' = \frac{3v^2+1}{2v} - v = \frac{3v^2+1-2v^2}{2v} = \frac{1+v^2}{2v}$$

$$\frac{2v}{1+v^2}\cdot dv = \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{2v}{1+v^2}\cdot dv = \int \frac{dx}{x} \quad , \quad x\neq 0$$

נבדוק כי אין פתרונות סינגולריים.

$$\ln|x| + C_1 = \ln|1+v^2|$$

$$\Rightarrow \quad Cx = 1+v^2$$

$$Cx = 1 + \frac{y^2}{x^2}$$

ומכאן פתרון הכללי במבנה סתומה.

שאלה מס' (3):

מכיוון שידוע כי y_1, y_2 שני פתרונות פרטיים של משוואה דיפרנציאלית לינארית של הומוגנית מסדר שלישי אזי הפונקציות

y_1, y_2, $y_1 - y_2$:מהוות

$$y_1 + \alpha(y_1 - y_2) = (\alpha+1)y_1 - \alpha y_2$$

$$y_2 + \beta(y_1 - y_2) = (\beta+1)y_2 - \beta y_1$$

בד שאחת של המשוואה הינו אופרטור לינארי, נסמן אופרטור זה ב- L

אזי:

$$L(y) = [y']'$$

$$L(x) = [1]' = 0$$

$$L(x^2) = [2x]' = 2$$

נניח: $L(\alpha y_1 + \beta y_2) = 1$

מתקיים:

$$L(\alpha y_1 + \beta y_2) = L(\alpha y_1) + L(\beta y_2) = \alpha L(y_1) + \beta L(y_2) = \alpha + \beta$$

$$L(x) = L(\alpha + \beta) = 1 = \alpha + \beta$$

כלומר

ומכאן שמצאנו שתי התשובות עבור α, β כך ש"י- $\alpha y_1 + \beta y_2$ פתרון של המשוואה.

שאלה מס' (4):

צורה כללית של משוואה דיפרנציאלית לינארית של הומוגנית מסדר כלשהו נתונה:

$$(x)_0 = y(x)_1 + y'(x)_0 \quad (1)$$ כלומר $(x)_0, (x)_1$ פונ' כלשהי

ומתקיים:

$$(x)_0 = y_1 \cdot (x)_1 + y'_1 \quad (2)$$ עבור y_1 נתון.

$$(x)_0 = y_2 (x)_1 + y'_2 \quad (3)$$

מכיוון ש- y_1, y_2 שני פתרונות שונים מתקיים $y_2 - y_1 \neq 0$

נשים לב מס' (3) פחות (2) נקבל:

$$0 = (y_2 - y_1)\cdot(x)_1 + y'_2 - y'_1$$

$$0 = (y_2 - y_1)\cdot(x)_1 + (y_2 - y_1)' \quad \Rightarrow$$

נשים לב כי $y_2 - y_1$ הוא פתרון הומוגני לא טריוויאלי של המשוואה ההומוגנית: $(y_2 - y_1)\cdot c$ הוא פתרון כללי להומוגנית כי נכפול פתרון של מד"ר ליניארית מסדר 1 הנתון מ"ו תה מתאדי.

ע"י מסכם יבוש כי: $y_p + y_h$ = פתרון כללי למד"ר פתרון פרטי כללי

ולכן פתרון כללי הינו:

$$y(x) = y_1 + (y_2 - y_1)\cdot c$$

או:

$$y(x) = y_2 + (y_2 - y_1)\cdot c$$

שאלה מס' (5):

נתון: $y_1(x) + P(x)y_1'(x) + y_1''(x) = 0$

$y_2(x) + P(x)y_2'(x) + y_2''(x) = 0$

צ"ל: $y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$ הוא פתרון להומוגנית. כאשר $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

נוכיח:

$$= (c_1y_1(x) + c_2y_2(x))'' + P(x)\cdot(c_1y_1(x) + c_2y_2(x))' =$$

$$= c_1y_1''(x) + c_2y_2''(x) + c_2P(x)y_2'(x) + P(x)y_1'(x)c_1 =$$

$$= \underbrace{[y_1''(x) + P(x)y_1'(x)]}_{=0 \text{ נתון}}\cdot c_1 + \underbrace{[y_2''(x) + P(x)y_2'(x)]}_{=0 \text{ נתון}}\cdot c_2 =$$

$$= 0\cdot c_1 + 0\cdot c_2 = 0$$

ולכן הוכחנו כי $c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$ הינו פתרון להומוגנית.

שאלה מס' (9):

א)

$$\frac{y}{x^2 - 4\sin x} = \frac{dx}{dy}$$

נסדר את המשוואה כ-: $x(y)$:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{x^2 - 4\sin y}{y} = \frac{1}{y}x - 4\frac{\sin y}{y} \quad , \quad y \neq 0$$

$$\Updownarrow$$

$$x' = x\frac{1}{y} + 4\frac{\sin y}{y} \quad \Leftarrow$$

נכפול את המשוואה במחובר כך:

$$= e^{\ln y} = \frac{1}{y}$$

נמצא גורם אינטגרציה: $= e^{\int \frac{1}{-y} dy} = e^{\ln(y)} = (y)\mu$

נסמן: $g(y) = y^2$, $d(y) = -\frac{1}{y}$

$$y^2 = e^{\ln y^2} =$$

נכפול את המשוואה בגורם שנקבע:

$$y^2 \cdot y' = 2y \cdot x + x^2 \cdot y$$

$$\int (x^2 \cdot y)' = \int y^2 \cdot y'$$

כעת יש לחשב את $\int y^2 \cdot y'$, נשים לב כי אינטגרציה בחלקים:

$$= xy^2 - \int 2y \cdot y' = xy^2 - \int \sin y \cdot y'$$

$$xy^2 = \sin y + y \cos y + c \quad /\int dy$$

סה"כ נקבל:

$$y = \frac{c}{y^2} + \frac{\sin y}{y} + \frac{y \cos y}{y^2} = (y)X$$

נכפול את המשוואה במחובר המשותף y^2:

$$\frac{y}{x} + 2y^2 = \frac{y^3 + x}{y^2} = \frac{y'}{x}$$

$$\frac{y^2}{x} - x' = 2y^2$$

נסמן: $g(y) = y^2$, $d(y) = -\frac{1}{y}$

נמצא גורם אינטגרציה: $= e^{\int -\frac{1}{y} dy} = e^{-\ln(y)} = (y)\mu$

$$y^2 = e^{\ln y^2} =$$

נכפול את המשוואה בגורם שנקבע:

$$y^2 \cdot y' = 2y^3 + x \cdot y^2$$

$$\int (y^2 \cdot x)' = \int y^2 \cdot y'$$

כעת יש לחשב את $\int y^2 \cdot y'$, נשים לב כי אינטגרציה בחלקים:

$$= y^2 x - \int 2y \cdot x = y^2 x - \int \sin y \cdot y$$

$$y^2 x = \sin y - y \cos y + c \quad /\int dy$$

סה"כ נקבל:

$$y = \frac{c}{y^2} + \frac{\sin y}{y^2} - \frac{\cos y}{y} = (y)X$$

ב) $y' = y(2y^2 + x)$

$$\frac{y'}{y} = 2y^2 + x$$

כאן שמים לב שמשמאל יש $\frac{y'}{y}$, נשים לב שהמשוואה היא $X(y)$:

$$\frac{y}{x} + 2y^2 = \frac{y^3 + x}{y} = \frac{y'}{xy}$$

נכפול את המשוואה בגורם האינטגרציה $y = 0$.

$$\frac{y^2}{c} + \frac{2y}{\sin y} - \frac{y}{\cos y} = (y)X$$

לכן הפתרון הכללי הינו:

$$x = ce^{\int \frac{1}{y} dy} \cdot e^{-\int \frac{2}{y} dy} = cx$$

הפתרון הנוסף: $x = 0$ (ע"י הצבה ישירה)

הפתרון הסינגולרי הינו $y = 0$.

(7) עמ' 2

$$\frac{1}{y}\cdot x' - \frac{x}{y^2} = 2y$$

$$\Rightarrow \int \left(\frac{1}{y}\cdot x\right)' = \int 2y$$

$$\Rightarrow \frac{1}{y}\cdot x = y^2$$

$$\Rightarrow x_p(y) = y^3$$

↑ פתרון פרט

וכמו כן פתרון ההומוגני הינו:

$$x_h(y) = C\cdot e^{\int \frac{1}{y}dy} = C\cdot e^{\ln|y|} = C\cdot y$$

לכן פתרון כללי הינו:

$$x(y) = y^3 + C\cdot y$$

שאלה מס (7):

א)

$$y' = y\cos y + x\cot y$$

$$y' - x\cot y = y\cos y \quad / : y$$

$$\frac{y'}{y} - \frac{1}{y^2}x\cot y = \cos y$$

נציב: $z = \frac{1}{y^2}$ ונקבל: $z' = -\frac{2}{y^3}\cdot y'$

$$-\frac{z'}{2} - z\cot y = \cos y$$

$$z' + 2z\cot y = -2\cos y$$

$$g(x) = -2\cos y \quad , \quad p(x) = \frac{2}{\tan x}$$

↑ כי $\cot x = \frac{1}{\tan x}$

נחשב את הגורם האינטגרציה:

$$\mu(x) = e^{\int p(x)dx} = e^{\int 2\cot x dx} =$$

נזכיר כי נוסחה שימושית $\int \cot x dx$:

$$\int \cot x dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx$$

נציב: $u = \sin x$ ונקבל: $du = \cos x dx$

$$\int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \int \frac{1}{u} du = \ln|u| = \ln|\sin x|$$

$$e^{2\int \cot x dx} = e^{2\ln|\sin x|} = \sin^2 x$$

לכן:

(5) נפתור את המשוואה הבאה ונקבל:

$$\sin^3 x \cdot z' + z \cdot 3\sin^2 x \cdot \cos x = -3\sin x \cdot \cos x$$

$$\Rightarrow \sin^3 x \cdot z' + 3\sin^2 x \cdot \cos x \cdot z = -3\sin x \cdot \cos x$$

$$\Rightarrow \int (\sin^3 x \cdot z)' = -\int 3\sin x \cdot \cos x$$

כעת נחשב את:

$$-3\int \sin x \cdot \cos x \, dx$$

נבצע: $t = \sin x$ ולכן: $dt = \cos x \, dx$

$$= -3 \cdot \int t^3 \, dt = -\frac{3}{4} t^4$$

נציב בחזרה $t = \sin x$ ונקבל:

$$= -\frac{3}{4} \cdot \sin^4 x$$

$$\Rightarrow \sin^3 x \cdot z = -\frac{3}{4}\sin^4 x$$

$z = (x)d$ פתרון פרט:

$$z = -\frac{3}{4}\sin x$$

נכפול פתרון שכזה פעמים בגורם:

$$\mu_z(x) = e^{\int -p(x)dx} = e^{\int -3\cos x dx} = \frac{1}{\sin^3 x} \cdot C$$

ולכן פתרון כללי הינו:

$$z(x) = -\frac{3}{4}\sin x + \frac{C}{\sin^3 x}$$

ומכיוון ש- $z = y^{-\frac{1}{3}}$ נקבל:

$$y(x) = \left(-\frac{3}{4}\sin x + \frac{C}{\sin^3 x}\right)^{-\frac{1}{3}}$$

ב) $y' = y(x - \ln y 2x^2)$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x - \ln y 2x^2}$$

שהופך ל- $x(y)$:

$$x' = \frac{x - \ln y 2x^2}{y} = \frac{x}{y} - \ln y 2x^2$$

$$x' + \frac{x}{y} = \ln y 2x^2$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{A\cdot 1}{1+(A)^2\cdot A-} = (A)X \quad \text{ומכיוון ש-} \quad \frac{z}{1}=x \text{ אזי:}$$

$$A\cdot 1 + (A)^2 \cdot A - = (A)z \quad \text{ולכן ומכיוון וכלל זה נובע:}$$

$$A\cdot 1 = e^{\int -\frac{A}{1}} \cdot c = e^{\int (A)dz} \cdot c = (A)yz$$

ובמונחים פחות פורמלי אך אולי יותר ברורים:

$$(A)^2y\cdot A - = (A)dz \quad \text{כלומר:}$$

$$(A)^2y - = (A)dz \cdot \frac{A}{1}$$

$$(A)^2y - = z(Ay) - \quad \text{אזי:}$$

נגזור בשני הצדדים לפי $Ay=h$ ונקבל:

$$= -\int z - \frac{z}{^2h} - = hphh - = ^2h -$$

נגזור: $Ay=h$ אזי $hp\frac{A}{1}=hp$

$$= -\int z hp \frac{A}{Ay}$$

נבצע אינטגרציה אל:

$$\int \frac{A}{Ay2-} = 1(z\cdot \frac{A}{1}) \quad \text{כלומר:}$$

$$\frac{A}{Ay2-} = \frac{z}{z} - 'z \cdot \frac{A}{1}$$

נכפיל אל כל המשוואה באופן הבא:

$$\frac{A}{Ay2-} = \frac{z}{z} + 'z-$$

$$Ay2- = \frac{A}{z} - 'z$$

$$Ay2- = (A)g \ , \ \frac{A}{1-} = (A)d$$

נמצא גורם אינטגרציה:

$$\frac{A}{1} = Ay-e = \exp\frac{A}{1-}\int e = \exp(A)dS\int e = (A)\mu$$

נכפיל את המשוואה באופן הבא:

$$\frac{A}{Ay2-} = \frac{z}{z} - 'z\cdot\frac{A}{1}$$

$$\frac{A}{Ay2-}\int = 1(z\cdot\frac{A}{1})\int \quad \text{כלומר:}$$

נבצע אינטגרציה אל:

$$= \exp\frac{A}{Ay}\int z-$$

נגזור: $Ay=h$ אזי $hp\frac{A}{1}=hp$

$$-^2h = \frac{^2h}{2}z- = hphh\int z- =$$

נגזור בחזרה $Ay=h$ ונקבל:

$$(A)^2yt - = z(Ayt) - =$$

ואז:

$$(A)^2yt - = (A)dz\cdot\frac{A}{1}$$

$$(A)^2yt\cdot A - = (A)dz \quad \text{כלומר:}$$

ובמונחים פחות פורמלי אך אולי יותר ברורים:

$$A\cdot 1 = \exp\frac{A}{1-}\int e\cdot 1 = e^{\int (A)dS-}\cdot 1 = (A)yz$$

ולכן ומכיוון שכלל זה נובע:

$$A\cdot 1 + (A)^2yt\cdot A - = (A)z$$

$$\frac{z}{1}=x \quad \text{ומכיוון ש-} \quad \frac{A\cdot 1}{1+(A)^2yt\cdot A-} = (A)X$$

נגזור: $\frac{x}{1}=z$ אזי: $\frac{^2x}{'x}-='z$

$$Ayt2 = \frac{A}{z} + 'z-$$

$$Ayt2- = \frac{A}{z} - 'z$$

$$Ayt2- = (A)g \ , \ \frac{A}{1-} = (A)d$$

נמצא גורם אינטגרציה:

$$\frac{A}{1} = Ayt-e = \exp\frac{A}{1-}\int e = \exp(A)dS\int e = (A)\mu$$

נכפיל את המשוואה באופן הבא:

$$\frac{A}{Ayt2-} = \frac{z}{z} - 'z\cdot\frac{A}{1}$$

$$\frac{A}{Ayt2-}\int = 1(z\cdot\frac{A}{1})\int \quad \text{כלומר:}$$

נבצע אינטגרציה אל:

$$= \exp\frac{A}{Ayt}\int z-$$

נגזור: $Ayt=h$ אזי $hp\frac{A}{1}=hp$

$$-^2h = \frac{^2h}{2}z- = hphh\int z- =$$

נגזור בחזרה $Ayt=h$ ונקבל:

$$(A)^2yt - = z(Ayt) - =$$

ואז:

$$(A)^2yt - = (A)dz\cdot\frac{A}{1}$$

$$(A)^2yt\cdot A - = (A)dz \quad \text{כלומר:}$$

ובמונחים פחות פורמלי אך אולי יותר ברורים:

$$A\cdot 1 = \exp\frac{A}{1-}\int e\cdot 1 = e^{\int (A)dS-}\cdot 1 = (A)yz$$

ולכן ומכיוון שכלל זה נובע:

$$A\cdot 1 + (A)^2yt\cdot A - = (A)z$$

$$\frac{z}{1}=x \quad \text{ומכיוון ש-} \quad \frac{A\cdot 1}{1+(A)^2yt\cdot A-} = (A)X$$

שאלה מס' (8):

מתוך מיכל גדול המכיל 10000 ליטר תמיסה מלוחה בריכוז של 50 גרם מלח לליטר נמזגת תמיסה מתוקה בקצב של 10 ליטר לדקה. מתוך המיכל יוצאים 5 ליטר לדקה. מתחילים עם 10 ליטר מים מתוקים ונתון כי ריכוז המלח במיכל נשאר קבוע (מדובר על 10 ליטר ומוציאים 10 ליטר).

יהי $Q(t)$ הכמות ב-ק"ג של המלח הנמצאת במיכל ברגע t.

אז ריכוז המלח במיכל ברגע t הינו:

$$\frac{\text{כמות המלח}}{\text{נפח המיכל}} = \frac{Q(t)}{10000} \quad \frac{\text{ק"ג}}{\text{ליטר}}$$

נרצה למצוא את $Q(t)$ ולשם כך נתחיל בכך שנמצא את קצב השינוי של כמות המלח ברגע t:

$$\left(\frac{\text{ק"ג}}{\text{ליטר}} \quad \frac{Q(t)}{10000}\right) \cdot \left(\frac{\text{ליטר}}{\text{דקה}} \quad 10\right) - \left(\frac{\text{ק"ג}}{\text{ליטר}} \quad 5\right) \cdot \left(\frac{\text{ליטר}}{\text{דקה}} \quad 10\right) = \frac{\text{ק"ג}}{\text{דקה}} \quad \dot{Q}(t)$$

$$\dot{Q}(t) = \frac{1}{1000} Q(t) - 50$$

ונקבל את המשוואה הדיפרנציאלית שבנוסף: $Q(0) = 1000$ ק"ג

נסדר:

$$\dot{Q}(t) + \frac{1}{1000} \cdot Q(t) = 50$$

נשתמש את שיטת הגורם האינטגרלי:

$$\mu(t) = e^{\int \frac{1}{1000} dt} = e^{\frac{1}{1000} t}$$

נכפול משוואה זו ונקבל:

$$e^{\frac{1}{1000} t} \cdot \dot{Q}(t) + \frac{1}{1000} \cdot e^{\frac{1}{1000} t} \cdot Q(t) = 50 \cdot e^{\frac{1}{1000} t}$$

$$= \left(e^{\frac{1}{1000} t} \cdot Q(t)\right)' = 50 \cdot e^{\frac{1}{1000} t}$$

ונבצע אינטגרציה ונקבל:

$$e^{\frac{1}{100}t} \cdot Q(t) = 100 \cdot 50 \cdot e^{\frac{1}{100}t} + C$$

$$Q(t) = 5000 + C \cdot e^{-\frac{1}{100}t}$$

נציב תנאי התחלה $Q(0) = 100$ ונמצא את C:

$$100 = Q(0) = 5000 + C \cdot e^{0}$$

$$C = 100 - 5000 = -4900$$

לכן פתרון המשוואה הינו:

$$Q(t) = 5000 - 4900 \cdot e^{-\frac{1}{100}t}$$

נותר לחשב את $Q(100)$ כמה בקירוב:

$$Q(100) = 5000 - 4900 \cdot e^{-1} \approx 3197.391$$