פתרון בעיית שטרום לוגמן שהיתה בתרגול

$$y'' + \lambda y = 0 \quad , \quad y(1) = y(-1) \quad , \quad y'(1) = y'(-1)$$

$$-1 < x < 1$$

פתרון

נציב מצפן הומוגנית מסדר 2 עם מקדמים קבועים ונקבל

נשפיס פתרון מהצורה $y = e^{kx}$

$$\Rightarrow \quad y' = k \cdot e^{kx} \quad , \quad y'' = k^2 \cdot e^{kx}$$

נציב במשוואה ונקבל -

$$e^{kx} \cdot (k^2 + \lambda) = 0$$

$$k = \pm \sqrt{-\lambda}$$

נבדוק מקרים :

1. $\lambda > 0$ ולכן נקבל שני שורשים ממשיים שונים :

הפתרון -

$$y(x) = A \cdot e^{x\sqrt{-\lambda}} + B \cdot e^{-x\sqrt{-\lambda}}$$

$$y'(x) = \sqrt{-\lambda} \cdot \left( A \cdot e^{x\sqrt{-\lambda}} - B \cdot e^{-x\sqrt{-\lambda}} \right)$$

נציב את תנאי השפה -

$$y(-1) = A \cdot e^{-\sqrt{-\lambda}} + B \cdot e^{\sqrt{-\lambda}} = A \cdot e^{\sqrt{-\lambda}} + B \cdot e^{-\sqrt{-\lambda}} = y(1)$$

$$\Rightarrow \quad (A - B) \cdot e^{x\sqrt{-\lambda}} = (A - B) \cdot e^{-x\sqrt{-\lambda}}$$

$$(B - A) \cdot \underbrace{\left( e^{-x\sqrt{-\lambda}} - e^{x\sqrt{-\lambda}} \right)}_{\neq 0} = 0$$

$$A = B$$ ולכן –

$$y'(-1) = \sqrt{-\lambda} \cdot \left( A \cdot e^{-\sqrt{-\lambda}} - B \cdot e^{\sqrt{-\lambda}} \right) = \sqrt{-\lambda} \cdot \left( A \cdot e^{\sqrt{-\lambda}} - B \cdot e^{-\sqrt{-\lambda}} \right) = y'(1)$$

$$e^{-\sqrt{-\lambda}} \cdot (A+B) = e^{\sqrt{-\lambda}} \cdot (A+B) \Leftarrow$$

$$(A+B) \cdot \underbrace{\left( e^{-\sqrt{-\lambda}} - e^{\sqrt{-\lambda}} \right)}_{\neq 0} = 0$$

$$A = -B \Leftarrow$$

אם נציב בתנאים $A = B$, $B = -A$ נקבל $A = B = 0$

$y \equiv 0$ פתרון טריוויאלי.

נקבל כי עבור $\lambda < 0$.

2. $\lambda = 0$ $\Leftarrow$ $y'' = 0$ $\Leftarrow$ $y = Ax + B$

$$y(-1) = -A + B = A + B = y(1)$$

$$A = 0$$

$$y = B \Leftarrow$$

סה"כ קיבלנו ערכים עבורם עבור $\lambda = 0$

3. $\lambda > 0$ מקרה מרוכבים - $k = \pm i\sqrt{\lambda}$

הפתרון -

$$y = A\cdot\cos(\sqrt{\lambda}x) + B\cdot\sin(\sqrt{\lambda}x)$$

$$y' = -A\cdot\sqrt{\lambda}\cdot\sin(\sqrt{\lambda}x) + B\cdot\sqrt{\lambda}\cdot\cos(\sqrt{\lambda}x)$$

(1) $y(-1) = A\cdot\cos(-\sqrt{\lambda}) + B\cdot\sin(-\sqrt{\lambda}) = A\cdot\cos(\sqrt{\lambda}) - B\cdot\sin(\sqrt{\lambda}) = y$

$$A\cdot\cos(-\sqrt{\lambda}) = A\cdot\cos(\sqrt{\lambda})$$

$$B\cdot\sin(-\sqrt{\lambda}) = -B\cdot\sin(\sqrt{\lambda})$$

$$A\cdot\cos(\sqrt{\lambda}) - B\cdot\sin(\sqrt{\lambda}) = A\cdot\cos(\sqrt{\lambda}) + B\cdot\sin(\sqrt{\lambda}) \Leftarrow$$

$$\boxed{-2\cdot B\cdot\sin(\sqrt{\lambda}) = 0}$$

(1) $y' =$

$$y'(-1) = -A\cdot\sqrt{\lambda}\cdot\sin(-\sqrt{\lambda}) + B\cdot\sqrt{\lambda}\cdot\cos(-\sqrt{\lambda}) = A\cdot\sqrt{\lambda}\cdot\sin(\sqrt{\lambda}) + B\cdot\sqrt{\lambda}\cdot\cos(\sqrt{\lambda})$$

$$B\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda} + A\sqrt{\lambda}\sin(\sqrt{\lambda}) = -A\sqrt{\lambda}\sin(\sqrt{\lambda}) + B\sqrt{\lambda}\cos(\sqrt{\lambda})$$

$$\boxed{2A\cdot\sqrt{\lambda}\cdot\sin(\sqrt{\lambda}) = 0}$$

אם $A = 0$ ו- $B = 0$ אז נקבל פתרון טריוויאלי. נרצה

$A \neq 0$ ו- $B \neq 0$ $\Leftarrow$ $\sin(\sqrt{\lambda}) = 0$ $\Leftarrow$ $\sqrt{\lambda} = \pi n$

$$\lambda_n = (\pi n)^2 \Leftarrow$$

$$\boxed{y = A\cdot\cos(\pi n x) + B\cdot\sin(\pi n x)}$$

פונקציות עצמיות עבור ע"ע $\lambda > 0$.