פתרון תרגיל בית חדו"א - מס' 5

שאלה 1:

$$y'' + \mu y = 0 \quad , \quad y(0) = y(\pi) = 0$$

פתרון:

נחפש פתרון מהצורה $y = e^{rx}$

נציב y ו-y'' במשוואה ונקבל:

$$r^2 e^{rx} = 0 \quad : \quad (r^2 + \mu) \cdot e^{rx} = 0$$

$$r_{1,2} = \pm \sqrt{-\mu}$$

נעבור למקרים:

1. אם $\mu = 0$ $\Leftarrow$ $r = 0$ $\Leftarrow$ נקבל פתרון מהצורה:

$$y = A \cdot X + B$$

$$y(0) = A \cdot 0 + B = 0 \Rightarrow \boxed{B = 0}$$

$$y(\pi) = A\pi + B = 0 \Rightarrow A = 0$$

$\Leftarrow$ $y \equiv 0$ (פתרון טריוויאלי)

2. אם $\mu \neq 0$ $\Leftarrow$ $r_{1,2} = \pm \sqrt{\mu}$ $\Leftarrow$ נקבל פתרון מהצורה:

$$y = A \cdot \cos(\sqrt{\mu} X) + B \cdot \sin(\sqrt{\mu} X)$$

אם $\mu < 0$: $y(0) = 0$ $\Leftarrow$ $A = 0$

$y(\pi) = 0$ נקבל $\Leftarrow$

נניח כי $B \neq 0$ $\Leftarrow$ $\sin(\pi\sqrt{\mu}) = 0$

אילוץ זה נותן פתרונות מהצורה $y_k(x) = B \cdot \sin(kx)$ עבור $k = \pi\sqrt{\mu}$ $k \in \mathbb{N}$

$$B \cdot \sin(\sqrt{\mu}\pi) = 0$$

שאלה 2

א. $y'' + \lambda y = 0$, $y(0) = y(1) = 0$

פתרון

נפתור עבור ערכים שונים של λ ונראה עבור אילו ערכים קיים פתרון שאינו אפס.

נמצא שורשים של המשוואה האופיינית: $y = e^{rx} \Rightarrow r_{1,2} = \pm\sqrt{-\lambda}$

מקרה 1: $\lambda < 0$ נקבל שני שורשים ממשיים שונים:

$$y = A \cdot e^{\sqrt{-\lambda}x} + B \cdot e^{-\sqrt{-\lambda}x}$$

נציב $x = 0$ כדי שיתקיים $y(0) = 0$:

$$y(0) = A + B = 0 \Rightarrow A = -B$$

נציב $x = 1$ כדי שיתקיים $y(1) = 0$:

$$y(1) = A \cdot e^{\sqrt{-\lambda}} + B \cdot e^{-\sqrt{-\lambda}} = -B \cdot e^{\sqrt{-\lambda}} + B \cdot e^{-\sqrt{-\lambda}} = B \cdot \underbrace{\left(e^{-\sqrt{-\lambda}} - e^{\sqrt{-\lambda}}\right)}_{\neq 0} = 0$$

לכן $B = 0 \Rightarrow A = B = 0 \Rightarrow y \equiv 0$ פתרון טריוויאלי.

אין ע"ע שלילי.

מקרה 2. אם $\lambda = 0$ אז $y'' = 0 \Rightarrow y = Ax + B$ ונציב תנאי שפה:

$y \equiv 0$ פתרון טריוויאלי. $\lambda = 0$ **אינו ע"ע**

מקרה 3. אם $\lambda > 0$ נקבל $r_{1,2} = \pm i\sqrt{\lambda}$ $\Rightarrow y = A \cdot \cos(\sqrt{\lambda}x) + B \cdot \sin(\sqrt{\lambda}x)$

ונציב תנאי שפה: $y(0) = 0 \Rightarrow A = 0$ (כבר קיבלנו)

ונציב תנאי שפה: $y(1) = 0$ -

$$y(1) = B \cdot \sin(\sqrt{\lambda}) = 0$$

נניח $B \neq 0$ אחרת $y \equiv 0$ פתרון טריוויאלי. $\sin(\sqrt{\lambda}) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{\lambda} \cdot 1 = k\pi \Leftrightarrow \lambda_k = \left(\frac{k\pi}{1}\right)^2$

$k \in \mathbb{N}$

$\Leftarrow$ כלומר עבור $\lambda > 0$:

$$\boxed{y_k(x) = B \cdot \sin\left(\frac{k\pi}{1} \cdot x\right)}$$

פתרון 3

$$-(x^2y'' + xy') = \lambda y \qquad 1 \le x \le e$$

$$y(1) = 0, \quad y'(e) = 0$$

פתרון

נפתור את המשוואה:

$$x^2y'' + xy' + \lambda y = 0$$

נציב פתרון מהצורה $y = x^r$ ונקבל במשוואה $\Rightarrow$

$$x^r \cdot \{ r(r-1) + r + \lambda \} = 0$$

$$r^2 + \lambda = 0 \implies r = \pm\sqrt{-\lambda}$$

נתחלק למקרים:

1. אם $\lambda < 0$ אז נקבל שני פתרונות ממשיים שונים - לכן הפתרון

$$y = A \cdot x^{\sqrt{-\lambda}} + B \cdot x^{-\sqrt{-\lambda}}$$

ומהתנאי $y(1) = 0$ נקבל -

$$y(1) = A + B = 0 \implies B = -A$$

$$y' = A \cdot \sqrt{-\lambda} \cdot x^{\sqrt{-\lambda}-1} - B \cdot \sqrt{-\lambda} \cdot x^{-\sqrt{-\lambda}-1}$$

$$y'(e) = A \cdot \sqrt{-\lambda}\, e^{\sqrt{-\lambda}-1} + B \cdot \sqrt{-\lambda}\, e^{-\sqrt{-\lambda}-1} = B \cdot \sqrt{-\lambda}\, e^{-1} \underbrace{\left(-e^{\sqrt{-\lambda}} + e^{-\sqrt{-\lambda}} \right)}_{*} = 0$$

$$\Rightarrow B = 0 \Rightarrow A = B = 0 \Rightarrow$$

פתרון טריוויאלי $y \equiv 0$

$$x^2y'' + xy' = 0$$

ב. כאשר $\lambda = 0$ אז

נפתור תחילה את המשוואה y'' בעזרת הצבה $z = y'$ אז $z' = y''$

$$x^2z' + xz = 0$$

נניח $x \neq 0$

$$\underbrace{x \cdot z' + z \cdot x}_{} = 0$$

$$(x \cdot z)' = 0$$

$$x \cdot z = c$$

$$z = \frac{c}{x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{c}{x} \Rightarrow \int dy = \int \frac{c}{x} dx$$

$$y = c \cdot \ln x + c_1 = c \cdot \ln(x) + c_1$$

נתון: $y(1) = 0$ אז $y(1) = 0 + c_1 = 0 \Rightarrow \boxed{c_1 = 0}$

$$y'(x) = \frac{c}{x} \Rightarrow y'(e) = \frac{c}{e} = 0 \Rightarrow \boxed{c = 0}$$

$$\Rightarrow y \equiv 0$$

ג. עבור $\lambda > 0$ נקבל משוואה מהצורה

$$y = A \cdot \cos(\sqrt{\lambda} \ln(x)) + B \cdot \sin(\sqrt{\lambda} \ln(x))$$

$$y' = -A \cdot \frac{\sqrt{\lambda}}{x} \sin(\sqrt{\lambda} \ln(x)) + B \cdot \frac{\sqrt{\lambda}}{x} \cos(\sqrt{\lambda} \ln(x))$$

$$y(1) = A \cdot \cos(0) + B \cdot 0 = 0 \Rightarrow A = 0$$

$$y'(e) = B \cdot \frac{\sqrt{\lambda}}{e} \cos(\sqrt{\lambda}) = 0$$

$\cos(\sqrt{\lambda}) = 0$ אז $B \neq 0$ אחרת נקבל פתרון טריוויאלי, לכן $e = 0$

$\lambda_k = \left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right)^2$ עבור $k \in \mathbb{N}$

ולכן הפ"ע עבור $\lambda > 0$ הם

$$\boxed{y_k(x) = B \cdot \sin\left(\left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right) \ln(x)\right)}$$