פתרון תרגיל בית מספר 10 - טפ"ב

שאלה 1 מיין את הנקודות הסינגולריות של המד"ר

$$x^2(2-x)^2 y'' + 3x y' + (2-x)y = 0$$

פתרון

נרשום את המשוואה -

$$y'' + \frac{3}{x\cdot(2-x)^2\cdot 2} y' + \frac{1}{x\cdot(2-x)\cdot 2} y = 0$$

$$P(x) = \frac{3}{x\cdot(2-x)^2\cdot 2}, \qquad Q(x) = \frac{1}{x\cdot(2-x)\cdot 2}$$

$x_0 = 0$ הנקודות הסינגולריות.

עבור $x_0 = 0$

$$\lim_{x\to 0} x\cdot P(x) = 0$$

$$\lim_{x\to 0} x^2\cdot Q(x) = 0$$

כלומר, הנקודה $x_0 = 0$ היא נקודה סינגולרית סדיסה

עבור $x_0 = 2$

$$\lim_{x\to 2} (2-x)\cdot P(x) = \infty$$

הנקודה $x_0 = 2$ סינגולרית מסדר 1

שאלה 2

$$y'' + y = 0$$

פתרון:

א. $Q(x) = 0$, $P(x) = 0$ נקודות רגולריות בכל הישר הממשי.

$x_0 = 0$ נקודה רגולרית.

ב. נשים פתרון מהצורה:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$$

נציב במשוואה הנתונה:

$$\sum_{n=2}^{\infty} n \cdot (n-1) \cdot a_n \cdot x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n = 0$$

נכפיל ב x^2 ונעביר אגפים:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} \cdot x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n = 0$$

נאחד את הסכומים:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n + (n+2)(n+1) a_{n+2} \right) \cdot x^n = 0$$

ונמצא נוסחת נסיגה:

$$a_{n+2} = \frac{-a_n}{(n+1)(n+2)} \qquad \forall\, n \geq 0$$

$a_0 = a_0$, $a_1 = a_1$ נקבע שרירותי. לפי נוסחת הנסיגה:

$$n=0 \Rightarrow a_2 = \frac{-a_0}{2}$$

$$n=1 \Rightarrow a_3 = \frac{-a_1}{6}$$

$$n=2 \Rightarrow a_4 = \frac{-a_2}{4\cdot 3} = \frac{a_0}{2\cdot 3\cdot 4} = \frac{a_0}{24}$$

$$n=3 \quad a_5 = \frac{-a_3}{5\cdot 4} = \frac{a_1}{6\cdot 5\cdot 4} = \frac{a_1}{120}$$

ניתן לשים לב כי a_0 נקבע השקפאים בזוגיות ו- a_1 נקבע השקפאים באי-זוגיות. נשווה:

$$a_0 = a_0 \ , \quad a_2 = \frac{-a_0}{2!} \ , \quad a_4 = \frac{a_0}{4!} \ , \quad a_6 = \frac{-a_0}{6!} \ \dots$$

נשים לב כללי

$$a_{2n} = \frac{(-1)^n}{(2n)!} a_0 \qquad (n \geq 1)$$

!-

$$a_1 = a_1 \ , \quad a_3 = \frac{-a_1}{3!} \ , \quad a_5 = \frac{a_1}{5!} \ , \ \dots$$

נשים לב כללי

$$a_{2n+1} = \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} a_1 \qquad (n \geq 1)$$

$$y(x) = a_0 + a_1 x - \frac{a_0}{2!} x^2 - \frac{a_1}{3!} x^3 + \frac{a_0}{4!} x^4 + \frac{a_1}{5!} - \cdots$$

$$y(x) = a_0 \cdot \left[1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} + \cdots \right]$$

$$+ a_1 \cdot \left[x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} + \cdots \right]$$

$$y(x) = a_0 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} + a_1 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

$$= a_0 \cdot \cos(x) + a_1 \cdot \sin(x)$$

שאלה 3:

$$(1+x^2)y'' + 2xy' + 4x^2y = 0$$

פתרון:

נרשום y'' – ונחלק ב:

$$y'' + \frac{2x}{1+x^2}y' + \frac{4x^2}{1+x^2}y = 0$$

$p(x) = \frac{2x}{1+x^2}$, $q(x) = \frac{4x^2}{1+x^2}$ אנליטיות

נמצא נקודות: $x \neq \pm i$

נבדוק $x_0 = 0$ נמצא לאיזו סוג נקודה שייכת

רדיוס התכנסות:

$$R = |0-i| = |-i| = 1$$

$\Rightarrow$ תחום התכנסות $|x| < 1$

נבדוק $x_0 = -\frac{1}{2}$ לאיזה סוג נקודה שייכת

רדיוס התכנסות:

$$R = |-\frac{1}{2} - i| = \sqrt{\frac{1}{4} + 1} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$\Rightarrow$ תחום התכנסות $|x + \frac{1}{2}| < \frac{\sqrt{5}}{2}$

שאלה 4:

$$2x^2y'' - xy' + (1+x)y = 0$$

פתרון:

א. נבדוק אם הנקודה

$$y'' - \frac{1}{2x}y' + \frac{(1+x)}{2x^2}y = 0$$

$$p(x) = -\frac{1}{2x} \quad , \quad q(x) = \frac{(1+x)}{2x^2}$$

סינגולרית $x=0$ נקודה

$$\lim_{x\to 0} x\cdot p(x) = -\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0} x^2\cdot q(x) = \frac{1}{2}$$

כיוון וקיבלנו שני גבולות סופיים אזי הנקודה $x=0$ היא

סינגולרית רגולרית של המשוואה הנתונה.

מ. הנקודה $x_0=0$ היא נקודה סינגולרית רגולרית שם הפתרונות

הינם מהצורה הבאה מהצורה -

$$y=\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^{n+r}$$

נגזור אחת

$$y'=\sum_{n=0}^{\infty} (n+r)\cdot a_n \cdot x^{n+r-1}$$

$$y''=\sum_{n=0}^{\infty} (n+r)\cdot(n+r-1)\cdot a_n \cdot x^{n+r-2}$$

נציב במשוואה ונקבל-

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2\cdot(n+r)(n+r-1)\cdot a_n\cdot x^{n+r} - \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)\cdot a_n\cdot x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n\cdot x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n\cdot x^{n+r+1} = 0$$

נציב $k=n+1$ בסכום האחרון -

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2\cdot(n+r)(n+r-1)\cdot a_n\cdot x^{n+r} - \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)\cdot a_n\cdot x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n\cdot x^{n+r} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}\cdot x^{n+r} = 0$$

נקבל תנאים -

$$x^r\left(2r(r-1)a_0 - ra_0 + a_0\right) + \sum_{n=1}^{\infty}\left(2(n+r)(n+r-1)a_n - (n+r)a_n + a_n + a_{n-1}\right) = 0$$

נקבל את המשוואה -

$$2r^2 - 3r + 1 = 0$$

$$r_{1,2} = 1, \frac{1}{2}$$

כאן כך -

$$\left(2(n+r)(n+r-1) - (n+r) + 1\right) a_n = -a_{n-1}$$

$$a_n = \frac{a_{n-1}}{2(n+r)(n+r-1) - (n+r) + 1}$$

עבור $r_1 = 1$

$$a_n = -\frac{a_{n-1}}{2n\cdot(n+1) - n} = -\frac{a_{n-1}}{n + 2n^2}$$

נחשב את המקדמים הראשונים -

$$a_0, \quad a_1 = -\frac{a_0}{3}, \quad a_2 = -\frac{a_1}{10} = \frac{a_0}{30}, \quad a_3 = \frac{-a_2}{21} = -\frac{a_0}{30\cdot 21}$$

$$y_1(x) = a_0\left(1 - \frac{1}{3}x + \frac{1}{30}x^2 - \frac{1}{30\cdot 21}x^3 + \dots\right)$$

$r_2 = \frac{1}{2}$ עבור

$$a_n = -\frac{a_{n-1}}{2\cdot(n+\frac{1}{2})(n-\frac{1}{2})-n+\frac{1}{2}} = -\frac{a_{n-1}}{2n^2-n}$$

$$a_0,\ a_1 = -a_0,\ a_2 = \frac{-a_1}{6} = \frac{a_0}{6},\ a_3 = \frac{-a_2}{15} = -\frac{a_0}{90}$$

$$y_2(x) = a_0\cdot\left(1 - x + \frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{90}x^3 + \dots\right)$$

הפתרון הכללי:

$$y = c_1\cdot\left(1 - \frac{1}{3}x + \frac{1}{30}x^2 - \frac{1}{30\cdot 21}x^3 + \dots\right) +$$

$$+ c_2\cdot\left(1 - x + \frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{90}x^3 + \dots\right)$$

שאלה 5:

א.

$$3xy'' + y' - y = 0$$

פתרון:

נניח פתרון מהצורה: $x = 0$ נקודה סינגולרית רגולרית.

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^{n+r}$$

נגזור –

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) \cdot a_n \cdot x^{n+r-1}, \quad y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) \cdot a_n \cdot x^{n+r-2}$$

נציב ונקבל –

$$3 \cdot x \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) a_n \cdot x^{n+r-2} + \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n \cdot x^{n+r-1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^{n+r} = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(3n+3r-2) \cdot a_n \cdot x^{n+r-1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^{n+r} = 0$$

$$x^r \cdot \left[r \cdot (3r-2) a_0 \cdot x^{-1} + \sum_{n=1}^{\infty} (n+r) \cdot (3n+3r-2) \cdot a_n \cdot x^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n \right] = 0$$

$$x^r \cdot \left[r \cdot (3r-2) \cdot a_0 \cdot x^{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} \left((n+r+1)(3n+3r+1) a_{n+1} - a_n \right) x^n \right] = 0$$

ס"ז הפולינום האופייני של המשוואה הנתונה:

$$r(3r-2)\,a_0 = 0$$

$$a_{n+1} - a_n = 0 \qquad n = 0,1,2,\ldots \qquad (n+r+1)(3n+3r+1)$$

שורש המשוואה האופייני שאין ס"ז, אין מוגדר גם עבור $a_0 = 0$, לכן נשים המשוואה הרקורסיבית הן:

$$r(3r-2) = 0$$

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{(n+r+1)(3n+3r+1)} \qquad n = 0,1,2,\ldots$$

נקבל גם כאן שני שורשים לפולינום האופייני $r_1 = \frac{2}{3}$, $r_2 = 0$.

נציב כל אחד משורשים שקיבלנו במשוואה הנ"ל:

$$r = \frac{2}{3} \Rightarrow \qquad a_{n+1} = \frac{a_n}{(n+5)(n+1)} \qquad n = 0,1,2,\ldots$$

$$r = 0 \Rightarrow \qquad a_{n+1} = \frac{a_n}{(n+1)(3n+1)} \qquad n = 0,1,2,\ldots$$

$r_2 = 0$

$$a_1 = \frac{a_0}{1\cdot 1}$$

$$a_2 = \frac{a_1}{2\cdot 4} = \frac{a_0}{2!\,1\cdot 4}$$

$$a_3 = \frac{a_2}{3\cdot 7} = \frac{a_0}{3!\,1\cdot 4\cdot 7}$$

$$a_4 = \frac{a_3}{4\cdot 10} = \frac{a_0}{4!\,1\cdot 4\cdot 7\cdot 10}$$

$$\vdots$$

$$a_n = \frac{a_0}{n!\,1\cdot 4\cdot 7\cdot 10\cdots(3n-2)}$$

$r_1 = \frac{2}{3}$

$$a_1 = \frac{a_0}{5\cdot 1}$$

$$a_2 = \frac{a_1}{8\cdot 2} = \frac{a_0}{2!\cdot 5\cdot 8}$$

$$a_3 = \frac{a_2}{11\cdot 3} = \frac{a_0}{3!\,5\cdot 8\cdot 11}$$

$$\vdots$$

$$a_n = \frac{a_0}{n!\,5\cdot 8\cdot 11\cdots(3n+2)}$$

⇐ קיבלנו כאן כי שני פתרונים בתשובה-

$$y_1(x) = x^{\frac{2}{3}}\cdot\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!\,5\cdot 8\cdot 11\cdots(3n+2)}x^n\right]$$

$$y_2(x) = x^0\cdot\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!\,1\cdot 4\cdot 7\cdots(3n-2)}x^n\right]$$

שני הפתרונים שקיבלנו הם בלתי תלויים לינארית ולכן נכתוב

הפתרון שלנו לאחר את הפתרון הכללי-

$y = c_1\cdot y_1(x) + c_2\cdot y_2(x)$ פתרון <u>שלנו</u> כפלי פרמטרים.

ג. $2xy'' + (1+x)y' + y = 0$

פתרון

$x_0 = 0$ נקודה סינגולרית כי $x = 0$.

נחפש פתרון $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^{n+r}$ מהצורה:

נציב ונקבל-

$$2 \cdot x \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) a_n \cdot x^{n+r-2} + (1+x) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) \cdot a_n \cdot x^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^{n+r} = 0$$

$$2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) a_n \cdot x^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n \cdot x^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n \cdot x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^{n+r} = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(2n+2r-1) a_n \cdot x^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty} (n+r+1) a_n \cdot x^{n+r} = 0$$

$$x^r \cdot \left[r(2r-1) a_0 \cdot x^{-1} + \sum_{n=1}^{\infty} (n+r)(2n+2r-1) a_n \cdot x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} (n+r+1) a_n \cdot x^n \right] = 0$$

$$x^r \cdot \left[r(2r-1) a_0 \cdot x^{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+r+1)(2n+2r+1) a_{n+1} + (n+r+1) a_n \right] x^n \right] = 0$$

מתקבלת אם נציב המשוואה המציינת

$$r(2r-1)=0$$

והמשוואה

$$(n+r+1)(2n+2r+1)a_{n+1}+(n+r+1)a_n=0\ ,\quad n=0,1,2,\ldots$$

היא שורשים שקבע המשוואה היא

$$r_1=\frac{1}{2}\ ,\quad r_2=0$$

את המשוואה הרקורסיבית נקבל בציון

$(n+r+1)$

ונקבל

$$a_{n+1}=-\frac{a_n}{2n+2r+1}$$

עבור $r=\frac{1}{2}$ \Leftarrow

$$a_{n+1}=-\frac{a_n}{2(n+1)}\ ,\quad n=0,1,2,\ldots$$

עבור $r=0$ \Leftarrow

$$a_{n+1}=-\frac{a_n}{2n+1}\ ,\quad n=0,1,2,\ldots$$

נמשיך ונקבל

$r_2=0$

$$a_1=\frac{-a_0}{1\cdot 1}$$

$$a_2=\frac{-a_1}{3}=\frac{a_0}{1\cdot 3}$$

$$a_3=\frac{-a_2}{5}=\frac{-a_0}{1\cdot 3\cdot 5}$$

$$a_4=\frac{-a_3}{7}=\frac{a_0}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}$$

$\vdots$

$r_1=\frac{1}{2}$

$$a_1=\frac{-a_0}{2\cdot 1}$$

$$a_2=\frac{-a_1}{2\cdot 2}=\frac{a_0}{2^2\cdot 2!}$$

$$a_3=\frac{-a_2}{2\cdot 3}=\frac{-a_0}{2^3\cdot 3!}$$

$$a_4=-\frac{a_3}{2\cdot 4}=\frac{a_0}{2^4\cdot 4!}$$

$\vdots$

$$a_n = \frac{(-1)^n \cdot a_0}{2^n \cdot n!}$$

$$a_n = \frac{(-1)^n \cdot a_0}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}$$

⇐ קיבלנו כי ניתן לכתוב את הפתרונות הבאים:

$$y_1(x) = x^{\frac{1}{2}} \cdot \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n \cdot n!} x^n\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n \cdot n!} x^{n+\frac{1}{2}}$$

כאשר נניח כי $x \geq 0$ ונציין שזה הכרחי תחום ההגדרה של הפונקציה.

$$y_2(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot (2n-1)} x^n \quad , \quad \forall x : |x| < \infty$$

כלומר $(-\infty, \infty)$ הוא תחום ההגדרה של y_2.

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

ג. $4x^2y'' + 2x(2+x)y' + (3x-1)y = 0$

פתרון:

$x_0 = 0$ נקי סינגולרי רגולרי

נניח פתרון מהצורה:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^{n+r}$$

$$\sum (4(n+r)(n+r-1) + 4(n+r) - 1) a_n \cdot x^n + \sum (2(n+r)+3) a_n x^{n+1} = 0$$

נשווה מקדמים:

$n = 0$ -

$$(4r(r-1) + 4r - 1) a_0 \quad , \quad a_0 \neq 0$$

$$r_1 = \frac{1}{2} \quad , \quad r_2 = -\frac{1}{2}$$

$$r_1 - r_2 \in \mathbb{Z}^+$$

נרשום כלשהו

$n < 0$ נשווה מקדמים:

$$a_n = \frac{-2(n+r)+1}{4(n+r)^2 - 1} a_{n-1} = \frac{-1}{2(n+r)} a_{n-1}$$

עבור -

$$a_1 = \frac{-1}{2(r+1)-1} a_0 = -\frac{1}{2r+1} a_0$$

$$a_2 = \frac{-1}{2(r+2)-1} a_1 = \frac{1}{(2r+3)(2r+1)} a_0$$

$$a_3 = \frac{-1}{2(r+3)-1}\, a_2 = -\frac{1}{(2r+5)(2r+3)(2r+1)}$$

ומכאן

$$y(x,r) = a_0 \cdot x^r \cdot \left[1 - \frac{x}{1+2r} + \frac{x^2}{(1+2r)(3+2r)} + \cdots \right]$$

נקבע $a_0 = 1$

שורש $r_1 = \frac{1}{2}$ נקבל

$$y_1(x) = y(x,r)\Big|_{r=\frac{1}{2}} = \sqrt{x}\left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2\cdot 4} - \frac{x^3}{2\cdot 4\cdot 6} + \cdots\right)$$

$y_2(x)$ נמצא שורש $r_2 = -\frac{1}{2}$ לפי הנוסחה

(לפי הכלל) $\frac{x}{0}$ כלומר $\frac{x}{1+(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2})2}$ מצבים בהם

נגזור.

$$y_2(x) = \left(\frac{\partial}{\partial r}\left((r-r_2)\, y(x,r)\right)\right)\Big|_{r=r_2}$$

$$(r-r_2)\, y(x,r) = \frac{1}{2}(1+2r)\, y(x,r) =$$

$$= \frac{1}{2}\, a_0 \cdot \left[(2r+1)x^r - x^{1+r} + \frac{x^{2+r}}{3+2r} - \frac{x^{3+r}}{(2r+3)(2r+5)} + \cdots \right]$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left[\left(r+\frac{1}{2}\right)y(x,r)\right] = \frac{1}{2}a_0\cdot\left[2x^r + (2r+1)x\ln(x) - x^{r+1}\ln(x) - \right.$$

$$\left. - \frac{2}{(2r+3)}x^{r+2} + \frac{1}{(2r+3)}x^{r+2}\ln(x) + \cdots\cdots\right]$$

ונקבל $r=-\frac{1}{2}$ כ'ג

$$y_2(x) = a_0\cdot x^{-\frac{1}{2}}\cdot\left[1 - \frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{3\cdot 2}x^3 + \cdots\right]$$

$$-\frac{1}{2}a_0\,x^{\frac{1}{2}}\ln(x)\cdot\left[1 - \frac{x}{2} + \frac{1}{2\cdot 4}x^2 + \cdots\right]$$

נקבע $a_0=1$ ונקבל

$$y_2(x) = -\frac{1}{2}\ln(x)\,y_1(x) + \frac{1}{\sqrt{x}}\left(1 - \frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{3\cdot 2}x^3 + \cdots\right)$$

<u>פתרון כללי</u>

$$y(x) = A\cdot y_1(x) + B\cdot y_2(x)$$

ד. $x^2y'' - xy' + y = 0$

פתרון

נניח כי

$$\sum a_n x^{n+r}\left((n+r)(n+r-1) - (n+r) + 1\right) = 0$$

עייי השוואת מקדמים של x^r נקבל

$$a_0 \neq 0 \quad , \quad a_0\left(r(r-1) - r + 1\right) = 0$$

$$r_1 = r_2 = 1$$

עייי השוואת מקדמים של x^{n+r} נקבל

$$a_n\left((n+r)(n+r-1) - (n+r) + 1\right) = 0$$

$$a_n(n+r-1)^2 = 0 \qquad n \geq 1$$

נקבע $a_0 = 1$ אזי

$$y(x,r) = a_0 x^r = x^r$$

נקבע $r = 1$ ונקבל $y_1(x)$

$$y_1(x) = y(x,r)\Big|_{r=1} = x$$

כאשר $y_2(x)$ נתון ע"י

$$y_2(x) = \frac{\partial}{\partial r} y(x,r)\Big|_{r=1} = \left(x^r \cdot \ln|x|\right)\Big|_{r=1} = x\ln|x|$$

אזי

$$y(x) = A_1 x + A_2 \cdot x\ln|x|$$