מציאת רדיוס התכנסות ומספר פ- משפט

שאלה 1:

א.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{4^n} x^n$$

פתרון:

נשתמש במבחן המנה לחישוב רדיוס ההתכנסות של הטור

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{n! \cdot 4^{n+1}}{4^n \cdot (n+1)!} \right| = 4 \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(n+1)} = 0$$

$\Leftarrow$ $\boxed{R=0}$ לכן הטור מתכנס רק כאשר $x=0$.

תחום ההתכנסות הוא $\boxed{x=0}$

ב.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} x^n$$

פתרון:

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{n \cdot 2^{n+1}}{2^n \cdot (n+1)} \right| = 2$$

הטור מתכנס בהחלט לכן מתכנס רק כאשר $\boxed{R=2}$.

$\Leftarrow |x| < 2$ נבדוק מה הטור מתכנס בקצוות $-2 < x < 2$

$X=2 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n$

$X=-2 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot n$

$\Rightarrow$ מתבדרים טורים שהמחלקים.

תן תחום התכנסות של $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ הוא $\boxed{-2 < X < 2}$

ב.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+n} (x-2)^n$$

סדרה"ת:

נשתמש במבחן המנה לחישוב רדיוס ההתכנסות בהתחלה.

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(2+n)}{(1+n)} \right| = 1$$

$\boxed{R=1}$

$\Rightarrow$ טווח שנינים של

$-1 < X-2 < 1 \iff |X-2| < 1$

$\iff 1 < X < 3$.

נבדוק התכנסות על קצוות הקטע:

$X=1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n}$ טור הרמוני, שמתבדר.

$X=3 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+n}$ טור לייבניץ שמתכנס בתנאי.

לכן תחום ההתכנסות הוא

$\boxed{1 < X \leq 3}$

ג.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot x^n}{\ln(n+1)}$$

פתרון:

נשתמש במבחן היחס לטור חיובי במקום.

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{n \cdot \ln(n+2)}{(n+1)\cdot \ln(n+1)} = \ldots$$

נחשב גבול זה בנפרד על ידי הפיכה

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n+1)}{\ln(n+2)}$$

בשונה מ

גבול הפונקציה (על פי לופיטל)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x+2)}{\ln(x+1)} \overset{(\frac{\infty}{\infty})}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{2+x}}{\frac{1}{1+x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1+x}{2+x} = 1$$

$$\Leftarrow$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n \cdot \ln(n+2)}{(n+1)\cdot \ln(n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{1+n} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n+2)}{\ln(n+1)} = 1$$

$\Leftarrow$ $\boxed{R=1}$ בטור נתון עבור $-1 < x < 1$

נפרוץ מקרי קצה

$x = 1 \Leftarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\ln(n+1)}$ בטור נתון עבור $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\ln(n+1)} = \infty$ אינו 0-

$x = -1 \Leftarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\cdot(-1)^n}{\ln(n+1)}$ בטור נתון עבור $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\ln(n+1)} = \infty$ אינו 0-

$\Leftarrow$ לכן תחום ההתכנסות הינו $\boxed{-1 < x < 1}$

ג.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n} (x+1)^n$$

פתרון:

נשתמש במבחן השורש לחישוב רדיוס ההתכנסות:

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)\left(3^n + (-2)^n\right)}{\left(3^{n+1} + (-2)^{n+1}\right) \cdot n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3^n \cdot \left(1 + \left(-\frac{2}{3}\right)^n\right)}{3^{n+1} \cdot \left(1 + \left(-\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right)} = \frac{1}{3}$$

$$\Leftarrow \quad \boxed{R = \frac{1}{3}} \quad \Leftrightarrow \quad |x+1| < \frac{1}{3} \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{1}{3} < x+1 < \frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow \quad -\frac{4}{3} < x < -\frac{2}{3}$$

נבדוק התכנסות בקצוות:

$$x = -\frac{4}{3} \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1 + \left(-\frac{2}{3}\right)^n}{n}$$

טור לייבניץ מתכנס.

$$x = -\frac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + \left(-\frac{2}{3}\right)^n}{n}$$

השוואה לטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ נותן טור מתבדר.

$$\Rightarrow \text{תחום ההתכנסות הוא} \quad \boxed{-\frac{4}{3} < x < -\frac{2}{3}}$$

שאלה 2:

נמצא פתרון בסביבת נקודה רגולרית $x_0=0$ ונשווה ל:

$$y''-xy=0$$

פתרון:

נניח פתרון מהצורה

$$y=\sum_{n=0}^{\infty} a_n\cdot x^n$$

$$\Rightarrow \quad y'=\sum_{n=1}^{\infty} n a_n\cdot x^{n-1}\ ,\quad y''=\sum_{n=2}^{\infty} n\cdot(n-1)\cdot a_n x^{n-2}$$

נציב את y ו- y'' המשוואה ונקבל:

$$\sum_{n=2}^{\infty} n\cdot(n-1)\,a_n\cdot x^{n-2} - x\cdot\sum_{n=0}^{\infty} a_n\cdot x^n = 0$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n\cdot(n-1)\cdot a_n\cdot x^{n-2} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n\cdot x^{n+1} = 0$$

נרצה לרשום חזקות בשני הגבולות של הסכומים לקבל חזקות בדיוק שווה. נציב באחד הסכומים שקל הבנוי והתחלה:

$$\sum_{n=2}^{\infty} n\cdot(n-1)\,a_n\cdot x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)\cdot(n+1)a_{n+2}\cdot x^n$$

נציב באחד הסכומים הבנוי נשני:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n\cdot x^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}\cdot x^n$$

$\Leftarrow$

נקבל את המשוואה:

$$\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}\cdot x^n}_{A} - \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}a_{n-1}\cdot x^n}_{B} = 0$$

נבדוק מהו טווח ההתחלה של A ושל B ונראה שהוא שונה:
ב- A הטווח הוא $n=0$ ואילו ב- B הוא $n=1$. לכן נבדוק:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}\cdot x^n = 2a_2 + \sum_{n=1}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}\cdot x^n$$

ולכן –

$$2a_2 + \sum_{n=1}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}\cdot x^n - \sum_{n=1}^{\infty}a_{n-1}\cdot x^n = 0$$

$$2a_2 + \sum_{n=1}^{\infty}\left((n+2)(n+1)a_{n+2} - a_{n-1}\right)\cdot x^n = 0$$

נשים לב שמתקיים –

עבור $n=0$ $\Leftarrow$ $2a_2 = 0 \Rightarrow a_2 = 0$

עבור $n>0$

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} - a_{n-1} = 0$$

נקבל נוסחת נסיגה:

$$a_{n+2} = \frac{a_{n-1}}{(n+2)(n+1)}$$

או

$$\boxed{a_{n+3} = \frac{a_n}{(n+3)(n+2)}}$$

נחשב מספר מקומות ראשונים:

$$a_3 = \frac{a_0}{2\cdot 3} \quad , \quad a_4 = \frac{a_1}{3\cdot 4} \quad , \quad a_5 = \frac{a_2}{5\cdot 4} = 0 \quad ,$$

$$a_6 = \frac{a_3}{5\cdot 6} = \frac{a_0}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6} \quad , \quad a_7 = \frac{a_4}{6\cdot 7} = \frac{a_1}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7}$$

נשים לב שמקדמים שאינדקס שלהם מתחלק ב-3 תלויים ב-a_0, מקדמים שאינדקס שלהם מתחלק ב-3 ועוד 1 תלויים ב-a_1, ומקדמים שאינדקס שלהם מתחלק ב-3 ועוד 2 תלויים ב-a_2.

מכיוון שמקדמים שתלויים ב-a_2 מתאפסים, אז $a_2 = 0$

ולכן, יש לנו מקדמים מהצורה a_{3k} שתלויים ב-a_0 ומקדמים מהצורה a_{3k+1} שתלויים ב-a_1. נוכל לחשב אותם כך:

$$a_{3k} = \frac{a_{3k-3}}{3k\cdot(3k-1)} = \frac{a_{3k-6}}{3k\cdot(3k-1)\cdot(3k-3)\cdot(3k-4)} = \dots = \frac{a_0}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6\cdot \dots\cdot(3k-1)\cdot 3k}$$

$$a_{3k+1} = \frac{a_{3k-2}}{(3k+1)\cdot 3k} = \frac{a_{3k-5}}{(3k+1)\cdot 3k\cdot(3k-2)(3k-3)} = \dots = \frac{a_1}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7\cdot \dots\cdot(3k)\cdot(3k+1)}$$

ביטוי כללי:

$$y = a_0\cdot\left(1 + \frac{x^3}{2\cdot 3} + \frac{x^6}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6} + \dots\right) + a_1\cdot\left(x + \frac{x^4}{3\cdot 4} + \frac{x^7}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7} + \dots\right)$$

שאלה 3 *

$$y'' - 2xy' + 6y = 0$$

פתרון *

נניח כי קיים פתרון מהצורה הבאה:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$$

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n \cdot x^{n-1} \quad , \quad y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n \cdot (n-1) \cdot a_n \cdot x^{n-2}$$

←

$$\sum_{n=2}^{\infty} n \cdot (n-1) a_n \cdot x^{n-2} - 2x \cdot \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n \cdot x^{n-1} + 6 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n = 0$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n \cdot (n-1) a_n \cdot x^{n-2} - 2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n \cdot x^n + 6 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n = 0$$

נבצע הסטה באינדקס של x:

$$\sum_{n=2}^{\infty} n \cdot (n-1) \cdot a_n \cdot x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) \cdot a_{n+2} \cdot x^n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot a_n \cdot x^n$$

←

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) \cdot a_{n+2} \cdot x^n - 2 \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot a_n \cdot x^n + 6 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left((n+2)(n+1)a_{n+2}-2(n-3)a_n\right)\cdot x^n=0$$

לכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים

$$(n+2)(n+1)a_{n+2}-2(n-3)a_n=0$$

נקבל כי נוסחת הנסיגה היא:

$$a_{n+2}=\frac{2\cdot(n-3)a_n}{(n+2)(n+1)}$$

ב. כפי שראינו בסעיף הקודם, הפתרון הכללי של המשוואה הנתונה בטור חזקות סביב $x=0$ הוא מהצורה:

$$y(0)=a_0$$
$$y'(0)=a_1$$

מכאן נובע שכל a_n עבור n אי-זוגי הוא קבוע. כלומר,

$$a_3=0,\ a_5=0,\ \ldots\ldots$$

לכל n זוגי נקבל כי הפתרון הוא קבוע ובפרט אלו קבועים שקולים לתנאים $y(0)=a_0=y$ ו-$y''-2xy'+6y=0$. כלומר כל פתרון y שמקיים את המשוואה. כמו בסעיף הקודם, לכן נחפש פתרון הכללי זהה. נשים לב כי $a_{2k}=0$ לכל $k>1$.

$$a_1 = y'(0)$$

$$a_3 = -\frac{2}{3}a_1 = -\frac{2}{3}y'(0)$$

$$a_5 = 0$$

לכן גם a_{2k+1} שווה $2 \le k$, לכל k טבעי.

פולינום -

$$y = a_1 x + a_3 x^2 = y'(0)\cdot x - \frac{2}{3}y'(0)\cdot x^3$$

שאלה 4

$$y''(x) + (x-1)y'(x) - y(x) = 0$$

פתרון

נניח כי הפתרון ניתן לפיתוח טיילור מרכזי סביב $x_0 = 0$

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n \qquad a_n \in \mathbb{R}$$

ניתן להניח כן, לצורך פתרון של המשוואה.

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n \cdot x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot a_n \cdot x^{n-1}$$

$$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n\cdot(n-1)\cdot a_n \cdot x^{n-2} = \sum_{n=1}^{\infty} n\cdot(n-1)\cdot a_n \cdot x^{n-2}$$

על מנת שפתרון $y(x)$ יהיה בסביבת הנקודה 0, נקבל:

$$\sum_{n=2}^{\infty} n\cdot(n-1)\cdot a_n\cdot x^{n-2} + (-1)\cdot\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot a_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n\cdot x^n = 0$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)\cdot a_n\cdot x^{n-2} - \sum_{n=1}^{\infty} n\cdot a_n x^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} n\cdot a_n\cdot x^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n\cdot x^n = 0$$

נרצה לקבל את הכוחות הזהים של x, לכן נצטרך להקפיץ את האינדקסים:

$$\sum_{n=2}^{\infty} n\cdot(n-1)a_n\cdot x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}\cdot x^n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\cdot a_{n+1}\cdot x^n$$

$\Leftarrow$ נקבל את השוויון:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}\cdot x^n + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n\cdot x^n - \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\cdot a_{n+1}\cdot x^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n\cdot x^n = 0$$

ושים לב כי:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot a_n\cdot x^n = \sum_{n=0}^{\infty} n\cdot a_n\cdot x^n$$

(כיוון שהאיבר הראשון שווה 0).

(21) כלומר-

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left((n+2)(n+1)a_{n+2}+(n-1)\cdot a_n+(n+1)a_{n+1}\right)x^n=0$$

לכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים

$$(n+2)(n+1)a_{n+2}+(n-1)a_n+(n+1)a_{n+1}=0$$

כלומר: נוסחת הנסיגה המתקבלת מהצבת טור החזקות. כפי שראינו בדוגמה הקודמת, עלינו למצוא את המקדמים ההתחלתיים באופן מפורש, כדי שנוכל לחשב את שאר המקדמים. נשתמש בתנאי ההתחלה:

$$y(0)=1$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n\cdot 0^n=1 \quad\Rightarrow\quad a_0=1$$

$$y'(0)=0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}n\cdot a_n\cdot 0^{n-1}=0 \quad\Rightarrow\quad a_1=0$$

אנו מעוניינים בפתרונות המתאימים לפתרון הנקודתי $y=0$. לכן נציב את המקדם a_5 ונקבל, בהתחשב בתנאי ההתחלה, כי כל המקדמים $\underline{\text{מתאפסים}}$ החל מ a_5 ואילך.

נחשב את נוסחת הנסיגה באופן הבא-

$$a_{n+2}=\frac{(n-1)\cdot a_n-(n+1)a_{n+1}}{(n+1)(n+2)}$$

$$a_2 = \frac{a_0 - a_1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$a_3 = \frac{-a_2}{3} = -\frac{1}{6}$$

$$a_4 = \frac{-a_2 - 3a_3}{12} = 0$$

$$a_5 = \frac{-a_3}{10} = \frac{1}{60}$$

$$y(x) = 1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{60}x^5 + \cdots$$

$$y^{(5)}(x) = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{60} + \underbrace{6! a_6 \cdot x + \cdots}_{x \to 0}$$

$$y^{(5)}(0) = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{60} = 2$$